

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Ivan Cvok

Zagreb, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Joško Deur, dipl. ing.

Student:

Ivan Cvok

Zagreb, 2018.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Najsrdačnije se zahvaljujem voditelju rada prof. dr. sc. Jošku Deuru na ukazanom povjerenju, nesebičnom odvajanju vremena i mnogim sugestijama tijekom vođenja ovog rada koje su znatno pridonijele njegovoj kvaliteti te velikoj motivaciji pruženoj kroz zajednički rad tijekom cijelog diplomskog studija.

Posebno se zahvaljujem dr. sc. Davoru Hrovatu na izvrsnim savjetima, diskusijama i ustupljenoj literaturi te mag. ing. Vanji Ranogajecu na pruženoj pomoći i savjetima.

Na kraju, posebno se zahvaljujem svojim roditeljima, Ljiljani i Ivanu, na pruženoj podršci i pomoći bez koje ne bih uspješno završio studij. Također, zahvaljujem se bratu i svim bližnjim prijateljima na podršci, a veliko hvala mojoj dugogodišnjoj djevojci Petri na pruženoj podršci, ljubavi i razumijevanju tijekom cijelog studija.

Ivan Cvok



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomatske ispite
Povjerenstvo za diplomatske radove studija strojarstva za smjerove:
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment,
inženjerstvo materijala te mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum:	Prilog:
Klasa:	
Ur. broj:	

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **IVAN CVOK**

Mat. br.: **0035194654**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Sinteza i usporedna analiza sustava regulacije vertikalne dinamike vozila uz primjenu aktivnog i poluaktivnog ovjesa**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Design and comparative analysis of vertical vehicle dynamics control systems based on active and semi-active suspension**

Opis zadatka:

Primarna prednost aktivnih u odnosu na pasivne ovjese jest poboljšanje udobnosti vožnje uz zadržavanje dobrih voznih karakteristika. Pritom se kvalitetan kompromis u pogledu performansi i cijene može postići korištenjem poluaktivnih ovjesa. Sustavi upravljanja vertikalnom dinamikom vozila uz primjenu aktivnih ovjesa uobičajeno se zasnivaju na korištenju linearnog kvadratičnog (LQ) regulatora, pri čemu se dodatno poboljšanje kvalitete regulacije može ostvariti primjenom unaprijedne informacije o profilu podloge. Slični pristupi mogu se primijeniti u slučaju poluaktivnog ovjesa, ali uz postavljanje implementacijskog ograničenja na pasivnost regulacijskog djelovanja. U radu je uz primjenu četvrtinskog modela vozila potrebno:

1. Provesti sintezu LQ regulatora za slučaj aktivnog ovjesa te analizirati kvalitetu regulacije putem prikaza međuovisnosti standardnih odstupanja akceleracije ovješene mase, hoda ovjesa i vertikalne deformacije autogume s obzirom na stohastičku pobudu podloge.
2. provesti sintezu LQ regulatora proširenog unaprijednim regulacijskim djelovanjima te analizirati unpređenje kvalitete regulacije putem usporednih grafova standardnih odstupanja.
3. Realizirati regulacijski sustav za slučaj poluaktivnog ovjesa s i bez unaprijednih regulacijskih djelovanja i izraditi numeričke alate za frekvencijsku i simulacijsku analizu kvalitete regulacije;
4. Provesti usporednu analizu kvalitete regulacije uz primjenu aktivnog i poluaktivnog ovjesa u vremenskoj i frekvencijskoj domeni.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:
03. svibnja 2018.

Rok predaje rada:
05. srpnja 2018.

Predviđeni datum obrane:
11. srpnja 2018.
12. srpnja 2018.
13. srpnja 2018.

Zadatak zadao:

prof. dr. sc. Joško Deur

Predsjednica Povjerenstva:

prof. dr. sc. Biserka Runje

SADRŽAJ

SADRŽAJ	I
POPIS SLIKA	III
POPIS TABLICA.....	V
POPIS OZNAKA	VI
SAŽETAK.....	XII
SUMMARY	XIII
1. UVOD.....	1
2. MATEMATIČKO MODELIRANJE VERTIKALNE DINAMIKE VOZILA.....	4
3. SUSTAV REGULACIJE AKTIVNOG OVJESA	12
3.1. Linearno kvadratično optimalno upravljanje	14
3.1.1. Deterministički i stohastički linearni kvadratični regulator	15
3.1.2. Analiza kovarijanci	16
3.1.3. Indeksi performansi aktivnog ovjesa	18
3.1.3.1. Udobnost.....	18
3.1.3.2. Upravljivost.....	19
3.1.3.3. Hod ovjesa	20
3.1.4. Digitalni linearni kvadratični regulator.....	21
3.1.4.1. Veza između kontinuirane i diskretne domene i ekvivalentni indeks performansi digitalnog LQ regulatora	21
3.2. Optimalno upravljanje modelom s jednim stupnjem slobode gibanja	23
3.2.1. Analiza kovarijanci modela s jednim stupnjem slobode gibanja.....	27
3.2.2. Simulacijska provjera rezultata dobivenih analizom kovarijanci	32
3.2.3. Digitalna regulacija aktivnog ovjesa uz unaprijedno poznavanje profila ceste ..	34
3.3. Optimalno upravljanje modelom s dva stupnja slobode gibanja	39
3.3.1. Analiza kovarijanci modela s dva stupnja slobode gibanja	40
3.3.2. Primjena regulacije s unaprijednim poznavanjem profila ceste na model s dva stupnja slobode gibanja	47
3.4. Više-kriterijsko optimiranje pojačanja regulatora pomoću MOGA-II genetskog algoritma	50
3.4.1. Optimizacija pojačanja kod modela s jednim stupnjem slobode gibanja	51
3.4.2. Optimizacija pojačanja kod modela s dva stupnja slobode gibanja.....	53
4. SUSTAV REGULACIJE POLUAKTIVNOG OVJESA	56
4.1. Optimalna "odrezana" regulacija poluaktivnog ovjesa	56
4.2. Performanse poluaktivnog ovjesa u odnosu na aktivni ovjes	57
4.2.1. Analiza kovarijanci za sustav regulacije aktivnog i poluaktivnog ovjesa	59
4.2.2. Usporedna analiza kvalitete regulacije u frekvencijskoj domeni.....	61
4.2.3. Usporedna analiza kvalitete regulacije u vremenskoj domeni.....	67
5. SIMULACIJA PUNOG MODELA VOZILA U CARSIM-U	78
5.1. Scenarij 1: Pobuđivanje rezonantne frekvencije ovješene mase pasivnog vozila.....	83
5.2. Scenarij 2: Sinusoidna pobuda promjenjive frekvencije za pobuđivanje vertikalnog ubrzanja i poniranja.....	85

5.3. Scenarij 3: Sinusoidna pobuda promjenjive frekvencije za pobuđivanje valjanja.....	89
6. ZAKLJUČAK.....	91
LITERATURA.....	96
Prilog A – izvod matrice pojačanja K_2 kod unaprijednog poznavanja ceste	99
PRILOZI.....	102

POPIS SLIKA

Slika 1.	Usporedba matematičkih modela u vertikalnoj dinamici vozila [4]	4
Slika 2.	Model s jednim stupnjem slobode gibanja	6
Slika 3.	Model s dva stupnja slobode gibanja s a) punim aktivnim ovjesom, b) poluaktivnim ovjesom, c) pasivnim ovjesom.....	7
Slika 4.	Primjer stohastičkog profila generiran integriranjem bijelog šuma	11
Slika 5.	Poopćeni shematski prikaz nadređenog i podređenog upravljanja aktivnim ovjesom [7, pog. 22].....	12
Slika 6.	Ovisnost ljudskog tijela o frekvenciji pobude prema ISO 2631 standardu i frekvencijska karakteristika težinskog filtera drugog reda [7, pog. 29].....	19
Slika 7.	Statička i dinamička normalna sila [7, pog. 29]	20
Slika 8.	Usporedba numeričkih i analitičkih rješenja za model sa jednim stupnjem slobode gibanja i funkcije cilja (3.26) i (3.41) uz $r_1 = 0$ [6; 7, pog.31]	30
Slika 9.	Usporedba normiranih rms vrijednosti za različite konstantne iznose penalizacije r_1 i mijenjani r_2 u izrazu (3.41).....	31
Slika 10.	Usporedba trzaja i ubrzanja ovještene mase za različite iznose težinskih koeficijenata u (3.41).....	31
Slika 11.	Usporedba numerički dobivenih (idealnih) rezultata i simulacijskih rezultata za model s jednim stupnjem slobode gibanja	33
Slika 12.	Model s jednim stupnjem slobode gibanja proširen unaprijednim poznavanjem ceste	34
Slika 13.	Usporedba teoretskih i simulacijskih rezultata s unaprijednim poznavanjem profila ceste za različite iznose težinskog koeficijenta r i različita vremena t_p	38
Slika 14.	Kompromis između udobnosti i hoda ovjesa za model s dva stupnja slobode gibanja [3; 6; 7, pog. 31]	42
Slika 15.	Kompromis između udobnosti i upravljivosti za model s dva stupnja slobode gibanja [3; 6; 7, pog. 31]	42
Slika 16.	Kompromis između hoda ovjesa i deformacije pnematika za model s dva stupnja slobode gibanja.....	43
Slika 17.	Kompromis između udobnosti, hoda ovjesa i upravljivosti na a) 3D dijagramu s tri osi, b) 2D dijagramu + treća os dana u boji	44
Slika 18.	Usporedba teorijskih (idealnih) i simulacijskih rezultata za model sa dva stupnja slobode gibanja.....	46
Slika 19.	Pojačanja K_2 za različita podešenja aktivnog ovjesa.....	48
Slika 20.	Optimalne performanse aktivnog ovjesa bez i s unaprijednim regulacijskim djelovanjem po budućem profilu ceste za različita vremena unaprijednog poznavanja profila ceste t_p i različite postavke težinskih koeficijenata r_1 i r_2 , za model s dva stupnja slobode gibanja	49
Slika 21.	Usporedba idealnih (LQ) rezultata i optimizacijskih rezultata za model s jednim stupnjem slobode gibanja	52
Slika 22.	Usporedba Pareto optimalnih rezultata dobivenih optimizacijom u MF (plavi puni krugovi) i LQ rezultata (siva površina) na 3D dijagramu, s linijama za lakše orijentiranje, za model s dva stupnja slobode gibanja.....	54
Slika 23.	Usporedba Pareto optimalnih rezultata dobivenih optimizacijom u MF (gore) i LQ rezultata (dolje), s linijama za lakše orijentiranje, za model s dva stupnja slobode gibanja.....	55
Slika 24.	Performanse poluaktivnog ovjesa s i bez unaprijednog unaprijednog regulacijskog djelovanja po budućem profilu ceste u odnosu na aktivne ovjese ..	60

Slika 25.	Amplitudno-frekvencijska karakteristika prijenosne funkcije ubrzanja ovještene mase s obzirom na brzinu profila ceste za postavke ovjesa S2, S3, S4 i S5, za pasivni ovjes (P); aktivni ovjes teorijska (A,id.) i estimirana (A, est.); polukativni ovjes estimirana (PA, est.); aktivni ovjes s 500 ms unaprijednog poznavanja profila ceste teorijska (A, $t_p = 0.5s$, id.) i estimirana (A, $t_p = 0.5s$, est.); poluaktivni ovjes s 500 ms unaprijednog poznavanja profila ceste estimirana (PA, $t_p = 0.5s$, est.)	63
Slika 26.	Amplitudno-frekvencijska karakteristika prijenosne funkcije deformacije pneumatika s obzirom na brzinu profila ceste za postavke ovjesa S2, S3, S4 i S5, za pasivni ovjes (P); aktivni ovjes teorijska (A,id.) i estimirana (A, est.); polukativni ovjes estimirana (PA, est.); aktivni ovjes s 500 ms unaprijednog poznavanja profila ceste teorijska (A, $t_p = 0.5s$, id.) i estimirana (A, $t_p = 0.5s$, est.); poluaktivni ovjes s 500 ms unaprijednog poznavanja profila ceste estimirana (PA, $t_p = 0.5s$, est.)	64
Slika 27.	Amplitudno-frekvencijska karakteristika prijenosne funkcije hoda ovjesa s obzirom na brzinu profila ceste za postavke ovjesa S2, S3, S4 i S5, za pasivni ovjes (P); aktivni ovjes teorijska (A,id.) i estimirana (A, est.); polukativni ovjes estimirana (PA, est.); aktivni ovjes s 500 ms unaprijednog poznavanja profila ceste teorijska (A, $t_p = 0.5s$, id.) i estimirana (A, $t_p = 0.5s$, est.); poluaktivni ovjes s 500 ms unaprijednog poznavanja profila ceste estimirana (PA, $t_p = 0.5s$, est.)	66
Slika 28.	Izbočina generirana pomoću kosinusnog modela, visine 5 cm s frekvencijom pobude: a) 1 Hz, b) 5 Hz, c) 10 Hz.....	67
Slika 29.	Simulacijski rezultati $\frac{1}{4}$ modela za frekvenciju pobude 1 Hz.....	71
Slika 30.	Simulacijski rezultati $\frac{1}{4}$ modela za frekvenciju pobude 5 Hz.....	74
Slika 31.	Simulacijski rezultati $\frac{1}{4}$ modela za frekvenciju pobude 10 Hz.....	77
Slika 32.	Shematski prikaz simulacijskog postava Carsim + Simulink	78
Slika 33.	MacPherson-ova opružna noga (lijevo) i ekvivalentni četvrtinski model (desno) [4]	79
Slika 34.	Primjer vozila iz D segmenta: CarSim (lijevo), stvarnost (desno) [43]	80
Slika 35.	Simulacijski rezultati iz CarSim-a za više uzastopnih izbočina za vozilo s pasivnim ovjesom (plavo, P), aktivnim ovjesom (crveno, A), poluaktivnim ovjesom (crno, PA), poluaktivnim i aktivnim ovjesom s unaprijednim regulacijskim djelovanjem po budućem profilu ceste (svijetlo plavo PA,p i zeleno A,p).....	84
Slika 36.	Simulacijski rezultati iz CarSim-a za sinusoidnu pobudu za vozilo s pasivnim ovjesom (plavo, P), aktivnim ovjesom (crveno, A) i aktivnim ovjesom s unaprijednim regulacijskim djelovanjem po budućem profilu ceste (zeleno, A,p)	87
Slika 37.	Simulacijski rezultati iz CarSim-a za više uzastopnih bump-ova za vozilo s pasivnim ovjesom (plavo, P), aktivnim ovjesom (crveno, A) i aktivnim ovjesom s unaprijednim regulacijskim djelovanjem po budućem profilu ceste (zeleno, A,p)	90

POPIS TABLICA

Tablica 1.	Parametri modela s dva stupnja slobode gibanja.....	8
Tablica 2.	Podešenja aktivnog ovjesa pri analizi poluaktivnog ovjesa	58
Tablica 3.	Performanse pasivnog (P), poluaktivnog (PA), aktivnog (A), poluaktivnog s unaprijednim djelovanjem (PA,p) i aktivnog ovjesa s unaprijednim djelovanjem (A,p) na izbočini frekvencije $f = 1$ Hz za podešenja S3, S4 i S5	69
Tablica 4.	Performanse pasivnog (P), poluaktivnog (PA), aktivnog (A), poluaktivnog s unaprijednim djelovanjem (PA,p) i aktivnog ovjesa s unaprijednim djelovanjem (A,p) na izbočini frekvencije $f = 5$ Hz	73
Tablica 5.	Performanse pasivnog (P), poluaktivnog (PA), aktivnog (A), poluaktivnog s unaprijednim djelovanjem (PA,p) i aktivnog ovjesa s unaprijednim djelovanjem (A,p) na izbočini frekvencije $f = 10$ Hz	76
Tablica 6.	Performanse $\frac{1}{4}$ modela s aktivnim i pasivnim ovjesom za vozilo iz CarSim-a ...	81
Tablica 7.	Performanse aktivnog (A), aktivnog s unaprijednim regulacijskim djelovanjem po budućem profilu ceste (A,p), poluaktivnog (PA), poluaktivnog s unaprijednim djelovanjem (PA,p) i pasivnog (P) ovjesa za sinusoidnu pobudu poniranja	86
Tablica 8.	Performanse aktivnog (A), aktivnog s unaprijednim regulacijskim djelovanjem po budućem profilu ceste (A,p), poluaktivnog (PA), poluaktivnog s unaprijednim djelovanjem (PA,p) i pasivnog (P) ovjesa za sinusoidnu pobudu valjanja	89

POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
A	$\text{m}^2/(\text{rad/m})$	koeficijent hrapavosti ceste
\mathbf{A}	/	matrica koeficijenata sustava
\mathbf{A}_{aug}	/	matrica koeficijenata sustava proširenog sustava u diskretnoj domeni
\mathbf{A}_{c}	/	matrica koeficijenata sustava u kontinuiranoj domeni
\mathbf{A}_{cl}	/	matrica koeficijenata sustava zatvorenog regulacijskog kruga
\mathbf{A}_{clv}	/	matrica koeficijenata sustava zatvorenog regulacijskog kruga vozila u diskretnoj domeni
\mathbf{A}_{d}	/	matrica koeficijenata sustava u diskretnoj domeni
\mathbf{A}_{i}	/	i-ta pomoćna matrica koeficijenata proširenog sustava
$\mathbf{A}_{\text{v}}^{\text{d}}$	/	matrica koeficijenata podsustava vozila u diskretnoj domeni
\mathbf{A}_{r}	/	matrica koeficijenata podsustava ceste u diskretnoj domeni
a_{cg}	m/s^2	vertikalno ubrzanje ovješene mase u CoG
$a_{\text{z,rms}}$	m/s^2	standardna devijacija vertikalnog ubrzanja ovješene mase
\mathbf{B}	/	matrica ulaza sustava
\mathbf{B}_{aug}	/	Matrica ulaza sustava proširenog sustava u diskretnoj domeni
\mathbf{B}_{c}	/	matrica ulaza sustava u kontinuiranoj domeni
\mathbf{B}_{d}	/	matrica ulaza sustava u diskretnoj domeni
$\mathbf{B}_{\text{v}}^{\text{d}}$	/	matrica ulaza podsustava vozila u diskretnoj domeni
b_{t}	Ns/m	koeficijent prigušenja pneumatika
b_{s}	Ns/m	koeficijent prigušenja amortizera
b_{sf}	Ns/m	koeficijent prigušenja prednjeg amortizera
b_{sr}	Ns/m	koeficijent prigušenja stražnjeg amortizera
$b_{\text{s,max}}$	Ns/m	gornje ograničenje koeficijenta prigušenja pneumatika
$b_{\text{s,min}}$	Ns/m	donje ograničenje koeficijenta prigušenja pneumatika
\mathbf{C}	/	matrica izlaza sustava
\mathbf{C}_{c}	/	matrica izlaza sustava u kontinuiranoj domeni
\mathbf{C}_{cl}	/	matrica izlaza sustava zatvorenog regulacijskog kruga

\mathbf{C}_d	/	matrica izlaza sustava u diskretnoj domeni
\mathbf{D}	/	matrica prijenosa sustava
\mathbf{D}_c	/	matrica prijenosa sustava u kontinuiranoj domeni
\mathbf{D}_d	/	matrica prijenosa sustava u diskretnoj domeni
\mathbf{F}	/	općenita matrica sustava pobuđenog bijelim šumom
F_a	N	sila aktuatora
$F_{z,i}$	N	normalna sila na dodiru i-tog pneumatika i podloge
$F_{z,i,rms}$	N	standardna devijacija normalne sile na dodiru i-tog pneumatika i podloge
f	/	frekvencija brzine podloge
\mathbf{G}	/	matrica prijenosa brzine podloge na sustav
\mathbf{G}_{aug}	/	matrica prijenosa brzine podloge na prošireni sustav
\mathbf{G}_v^d	/	matrica prijenosa brzine podloge na sustav vozila u diskretnoj domeni
\mathbf{G}_r	/	matrica prijenosa brzine podloge na sustav ceste u diskretnoj domeni
g	m/s ²	gravitacijsko ubrzanje
h	m	visina izbočine u kosinus modelu
J	/	funkcija cilja
\mathbf{K}	/	matrica pojačanja
\mathbf{K}_{aug}	/	matrica pojačanja proširenog sustava
\mathbf{K}_c	/	matrica pojačanja kontinuiranog sustava
\mathbf{K}_d	/	matrica pojačanja diskretnog sustava
\mathbf{K}_1	/	matrica pojačanja stanja vozila
\mathbf{K}_2	/	matrica pojačanja stanja ceste
k	N/m	koeficijent krutosti stvarne opruge
k_{eq}	N/m	ekvivalentni koeficijent krutosti stvarne opruge
k_t	N/m	koeficijent vertikalne krutosti pneumatika
k_{tf}	N/m	koeficijent vertikalne krutosti prednjeg pneumatika
k_{tr}	N/m	koeficijent vertikalne krutosti stražnjeg pneumatika
k_s	N/m	koeficijent krutosti opruge
k_f	N/m	koeficijent krutosti prednje opruge
k_r	N/m	koeficijent krutosti stražnje opruge

k_i	/	pojačanje i-te varijable stanja pri optimiranju
$k_{i,min}$	/	donje ograničenje pojačanja i-te varijable stanja pri optimiranju
$k_{i,max}$	/	gornje ograničenje pojačanja i-te varijable stanja pri optimiranju
l	m	međuosovinski razmak
l_i	m	udaljenost i-te osovine od CoG
L_{izb}	m	duljina izbočine kosinus modela
MR	/	mehanički prijenosni omjer ovjesa
M_s	kg	ovješena masa cijelog vozila
m_s	kg	ovješena masa četvrtinskog modela vozila
$m_{s,i}$	kg	ovješena masa i-tog kraja vozila
m_u	kg	neovješena masa četvrtinskog modela vozila
$m_{us,i}$	kg	neovješena masa i-tog kotača
N	/	broj uzoraka unaprijednog poznavanja profila ceste
n	/	koeficijent valovitosti
\mathbf{N}	/	matrica težina mješovitih članova funkcije cilja
\mathbf{N}_c	/	matrica težina mješovitih članova kontinuirane funkcije cilja
\mathbf{N}_d	/	matrica težina mješovitih članova diskretne funkcije cilja
\mathbf{P}	/	Riccatijeva matrica
$P_{i,j}$	/	element Riccatijeve matrice u i-tom retku i j-tom stupcu
\mathbf{P}_c	/	Riccatijeva matrica kontinuiranog sustava
\mathbf{P}_d	/	Riccatijeva matrica diskretnog sustava
\mathbf{Q}	/	težinska matrica penalizacije varijabli stanja
\mathbf{Q}_c	/	težinska matrica penalizacije varijabli stanja u kontinuiranoj domeni
\mathbf{Q}_d	/	težinska matrica penalizacije varijabli stanja u diskretnoj domeni
\mathbf{Q}_w	/	matrica spektralne gustoće snage
\mathbf{R}	/	težinska matrica penalizacije upravljačkih varijabli
\mathbf{R}_c	/	težinska matrica penalizacije upravljačkih varijabli u kontinuiranoj domeni
\mathbf{R}_d	/	težinska matrica penalizacije upravljačkih varijabli u diskretnoj domeni
r_i	/	i-ti težinski koeficijent

S_{zr}	m^3/rad^3	spektralna gustoća snage pomaka ceste
$S_{\dot{z}r}$	$\text{m}^4/\text{rad s}$	spektralna gustoća snage brzine ceste
T_s	s	vrijeme uzorkovanja
T_{izb}	s	duljina izbočine kosinus modela u vremenskoj domeni
t_b	s	vrijeme pojavljivanja izbočine kosinus modela u vremenskoj domeni
t_p	s	vrijeme unaprijednog poznavanja profila ceste
\mathbf{u}	/	upravljački vektor
U	N	sila aktuatora
u	m/s^2	normirana sila aktuatora
u_1	m/s^3	upravljačka varijabla modela s jednim stupnjem slobode gibanja koji uključuje trzaj
V	m/s	uzdužna brzina vozila
w	m/s	brzina podloge
w_r	m/s	brzina podloge – ulaz u model ceste
w_v	m/s	brzina podloge – ulaz u model vozila
\mathbf{X}	/	matrica kovarijanci vektora stanja
X_i	/	i-ti dijagonalni element matrice kovarijanci vektora stanja
\mathbf{x}	/	vektor stanja
x	m	prostorna koordinata profila ceste
\mathbf{x}_v	/	vektor stanja vozila
\mathbf{x}_r	/	vektor stanja ceste
$\dot{\mathbf{x}}$	/	derivacija vektora stanja
x_1	m	hod ovjesa modela s jednim stupnjem slobode gibanja
x_1	m	deformacija pneumatika modela s dva stupnja slobode gibanja
$x_{1,\text{rms}}$	m	standardna devijacija hoda ovjesa modela s jednim stupnjem slobode gibanja
$x_{1,\text{rms}}$	m	standardna devijacija deformacije pneumatika modela s dva stupnja slobode gibanja
\tilde{x}_1	$\text{s}^{1/2}$	normirana standardna devijacija hoda ovjesa modela s jednim stupnjem slobode gibanja
\tilde{x}_1	$\text{s}^{1/2}$	normirana standardna devijacija deformacije pneumatika modela s dva stupnja slobode gibanja
$\tilde{x}_{1,\text{max}}$	$\text{s}^{1/2}$	ograničenje normirane standardne devijacije hoda ovjesa modela s jednim stupnjem slobode gibanja
$\tilde{x}_{1,\text{max}}$	$\text{s}^{1/2}$	ograničenje normirane standardne devijacije deformacije pneumatika modela s dva stupnja slobode gibanja

\dot{x}_1	m/s	brzina deformacije ovjesa modela s jednim stupnjem slobode gibanja
\dot{x}_1	m/s	brzina deformacije pneumatika modela s dva stupnja slobode gibanja
x_2	m/s	vertikalna brzina ovještene mase modela s jednim stupnjem slobode gibanja
x_2	m/s	vertikalna brzina neovještene mase modela s jednim stupnjem slobode gibanja
\dot{x}_2	m/s ²	ubrzanje ovještene mase modela s jednim stupnjem slobode gibanja
\dot{x}_2	m/s ²	ubrzanje neovještene mase modela s dva stupnja slobode gibanja
$\dot{x}_{2,rms}$	m	standardna devijacija ubrzanja ovještene mase modela s jednim stupnjem slobode gibanja
\tilde{x}_2	s ^{-3/2}	normirana standardna devijacija ubrzanja ovještene mase modela s jednim stupnjem slobode gibanja
$\tilde{x}_{2,max}$	s ^{-3/2}	ograničenje normirane standardne devijacije ubrzanja ovještene mase modela s jednim stupnjem slobode gibanja
x_3	m/s	ubrzanje ovještene mase modela s jednim stupnjem slobode gibanja koji uključuje trzaj
x_3	m	hod ovjesa modela s dva stupnja slobode gibanja
$x_{3,rms}$	m	standardna devijacija hoda ovjesa modela s dva stupnjem slobode gibanja
\tilde{x}_3	s ^{-5/2}	normirana standardna devijacija trzaja ovještene mase modela s jednim stupnjem slobode gibanja
\tilde{x}_3	s ^{1/2}	normirana standardna devijacija hoda ovjesa modela s dva stupnjem slobode gibanja
\tilde{x}_3	s ^{1/2}	ograničenje normirane standardne devijacije hoda ovjesa modela s dva stupnjem slobode gibanja
\dot{x}_3	m/s ³	trzaj ovještene mase modela s jednim stupnjem slobode gibanja
\dot{x}_3	m/s	brzina deformacije ovjesa modela s dva stupnja slobode gibanja
x_4	m/s	vertikalna brzina ovještene mase modela s dva stupnja slobode gibanja
\dot{x}_4	m/s ²	ubrzanje ovještene mase modela s dva stupnja slobode gibanja
$\dot{x}_{4,rms}$	m/s ²	standardna devijacija ubrzanja ovještene mase modela s dva stupnja slobode gibanja
\tilde{x}_4	s ^{-3/2}	normirana standardna devijacija ubrzanja ovještene mase modela s dva stupnja slobode gibanja
$\tilde{x}_{4,max}$	s ^{-3/2}	ograničenje normirane standardne devijacije ubrzanja ovještene mase modela s dva stupnja slobode gibanja
x_{ri}	/	i-ta varijabla stanja ceste
y	/	vektor izlaza
Y	/	matrica kovarijanci vektora izlaza
z_r	m	vertikalni profil ceste (položaj podloge)
z_u	m	položaj neovještene mase
z_s	m	položaj ovještene mase

$\dot{z}_{s,i,rms}$	m	standardna devijacija hoda ovjesa i-tog kraja vozila
\dot{z}_r	m/s	brzina profila ceste
\dot{z}_u	m/s	vertikalna brzina neovještene mase
\dot{z}_s	m/s	vertikalna brzina ovještene mase
\ddot{z}_u	m/s ²	vertikalno ubrzanje neovještene mase
\ddot{z}_s	m/s ²	vertikalno ubrzanje ovještene mase
$\ddot{z}_{cg,rms}$	m/s ²	standardna devijacija vertikalnog ubrzanja ovještene mase u CoG
$\ddot{\theta}_{cg,rms}$	rad/s ²	standardna devijacija ubrzanja poniranja ovještene mase u CoG
$\ddot{\Phi}_{cg,rms}$	rad/s ²	standardna devijacija ubrzanja valjanja ovještene mase u CoG
ω	rad/s	kutna frekvencija u vremenskoj domeni
ω_n	rad/s	prirodna frekvencija ovještene mase modela s jednim stupnjem slobode gibanja
$\omega_{n,s}$	rad/s	prirodna frekvencija ovještene mase modela s dva stupnja slobode gibanja
$\omega_{n,us}$	rad/s	prirodna frekvencija neovještene mase modela s dva stupnja slobode gibanja
ζ	/	relativni koeficijent prigušenja ovještene mase modela s jednim stupnjem slobode gibanja
ζ_s	/	relativni koeficijent prigušenja ovještene mase modela s dva stupnja slobode gibanja
ζ_{us}	/	relativni koeficijent prigušenja neovještene mase modela s dva stupnja slobode gibanja

SAŽETAK

Aktivni i poluaktivni ovjesi mehatronički su sustavi koji omogućavaju regulaciju vertikalne dinamike vozila čime se postiže bolja udobnost vožnje uz zadržavanje dobrih voznih karakteristika vozila. Pritom se dodatno poboljšanje kvalitete regulacije može postići korištenjem unaprijedne informacije o profilu podloge. Prednosti aktivnih i poluaktivnih ovjesa poznate su nekoliko desetljeća te su kroz veliki broj znanstvenih radova predstavljene razne strategije upravljanja vertikalnom dinamikom. Jedan od najčešće korištenih pristupa sinteze nadređene strategije upravljanja vertikalnom dinamikom je linearno kvadratično (LQ) optimalno upravljanje. U ovom je radu predstavljena sinteza LQ regulatora za slučaj aktivnog i poluaktivnog ovjesa s i bez unaprijednog regulacijskog djelovanja zasnovanog na unaprijednom poznavanju profila podloge (ukupno četiri tipa ovjesa). Sinteza sustava regulacije provedena je na četvrtinskom modelu vozila s jednim stupnjem slobode gibanja koji uključuje dinamiku samo ovješene mase i na modelu s dva stupnja slobode gibanja koji uključuje i dinamiku neovješene mase. Provedena je usporedna analiza kvalitete regulacije navedena četiri tipa mehatroničkih ovjesa i pasivnog ovjesa četvrtinskog modela vozila putem prikaza međuovisnosti suprostavljenih kriterija udobnosti vožnje, upravljivosti vozilom i ograničenog hoda ovjesa s obzirom na stohastičku pobudu podloge. Na temelju prve usporedne analize broj postavki regulatora ovjesa je reduciran i fokusiran na značajne postavke te je provedena daljnja usporedna analiza koja je proširena na analizu u frekvencijskoj domeni (amplitudno-frekvencijske karakteristike) i vremenskoj domeni (simulacijski odzivi s determinističkom podlogom). Na kraju rada prikazana je implementacija sustava regulacije ovjesom, zasnovanog na četvrtinskom modelu vozila, na puni model vozila u CarSim-u te je provedena usporedna analiza kvalitete regulacije u vremenskoj domeni za tri testne procedure koje pobuđuju tri glavna gibanja ovješene mase: vertikalno gibanje, poniranje i valjanje. Rezultati usporednih analiza pokazali su da aktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem daje najveća poboljšanja performansi po svim kriterijima i da je jeftiniji poluaktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem vrlo blizu po performansama, a u nekim slučajevima i bolji od aktivnog ovjesa bez unaprijednog djelovanja. Također, rezultati pokazuju da je moguće postići značajna poboljšanja performansi cijelog vozila primjenom relativno jednostavnog sustava regulacije.

Ključne riječi: optimalno upravljanje, LQR, aktivni ovjes, poluaktivni ovjes, unaprijedno poznavanje profila ceste, četvrtinski model vozila, više-kriterijsko optimiranje

SUMMARY

Active and semi-active suspensions are mechatronic devices used within vertical vehicle dynamics control systems for improving ride comfort while maintaining good handling performance. Additional ride comfort and vehicle handling improvements can be obtained by using the advance knowledge of upcoming road disturbance i.e. road profile preview. The potential benefits of using active and semi-active suspensions are well known, as there have been strong research activities in the area over the last several decades resulting in various vertical dynamics control strategies. One of the most popular approaches to active suspension control is the Linear Quadratic (LQ) optimal control/regulation. This Thesis presents the design of the LQ regulator (LQR) for active and semi-active suspension control system with and without road profile preview control (in total four suspension types). LQR design is based on Quarter-car model with one degree of freedom which includes sprung mass dynamics, as well as on quarter-car model with two degrees of freedom which additionally includes unsprung mass dynamics. The trade-off between conflicting criteria of ride comfort, vehicle handling and suspension stroke constraint of the four suspension types and the passive suspension is first analyzed by comparing the standard deviations of related state variables with the assumption of stochastic road input. Based on the insights of first comparative analysis, the number of designs is reduced and further analyses are carried out in the frequency domain (frequency responses) and the time domain (simulation with deterministic road input). Active and semi-active control systems, based on the quarter-car model, are then implemented on nonlinear, full-car model in CarSim. Comparative performance analysis is again carried out in the time domain using three ride comfort test procedures which excite sprung mass heave, pitch and roll motion. The results of all analyses point out that active suspension control with road preview offers highest performance improvement (in terms of all criteria) and that the performance of semi-active suspension control with road preview is similar, and in some cases better, than the performance of active suspension control system without road preview. The results also show that significant performance improvement can be obtained for the full car model by applying relatively simple decoupled suspension control system.

Keywords: optimal control, LQR, active suspension, semi-active suspension, road preview control, quarter-car model, multi-objective optimization

1. UVOD

Automobili i ostala prijevozna sredstva danas su sastavni dio čovjekova života i prosječno čovjek u Europi i SAD-u provede otprilike jedan sat vremena u vožnji [1, 2]. Za što kvalitetnije iskorištavanje tog vremena u poslovne svrhe, zabavu ili odmor, vožnja mora biti maksimalno moguće udobna. Ključni podsustav automobila koji osigurava udobnost vožnje je ovjes. Naime, prometnice nikada nisu savršeno izgrađene i sadrže neravnine. Tokom vožnje neravnine ceste uzrokuju udare i vibracije (primarno vertikalne) i zadaća je ovjesa ublažiti udare te prigušiti vibracije radi postizanja udobnosti vožnje. Druga i jednako važna zadaća ovjesa je osigurati neprekidan kontakt između pneumatika i podloge bez obzira na vanjske uvjete jer jedino tada postoji normalna sila na mjestu njihova kontakta koja osigurava direkcijsku stabilnost vozila, te prijenos uzdužnih i bočnih sila za potrebe manevara kočenja ili skretanja. Obje zadaće ovjes mora obaviti uz ograničeni hod, kako ne bi došlo do udaranja u granične odbojnice [3, 4].

Kada promatramo vozilo sa stanovišta ovjesa, ono je sustav kojeg čine neovještene mase (kotači i pneumatici, kočnice, elementi ovjesa) i ovješena masa (karoserija, teret, putnici), koje su povezane ovjesom [4]. Konvencionalni ovjesi su pasivni, sastavljeni od opruga (elastični element) koje absorbiraju energiju vibracija i amortizera (prigušni element) koji disipiraju energiju vibracija. Za postizanje veće udobnosti vožnje pasivni ovjes treba biti što "mekši" (manja krutost opruge i manji koeficijent prigušenja amortizera), a za postizanje veće sigurnosti vožnje, tj. upravljivosti vozila poželjno je da bude što "tvrđi" (veća krutost opruge i veći koeficijent prigušenja) [5]. Očigledno je da su ta dva kriterija oprečna i pasivni se ovjesi dizajniraju s ciljem postizanja zadovoljavajućeg kompromisa između udobnosti vožnje i upravljivosti. Razvojem mehatroničkih sustava otvorena je mogućnost poboljšanja udobnosti vožnje uz zadržavanje upravljivosti vozilom primjenom raznih konfiguracija poluaktivnih i aktivnih ovjesa [3, 5, 6, 7 pog. 22].

Poluaktivni ovjesi sastoje se od elektronički upravljanih amortizera s promjenjivim koeficijentom prigušenja. Dije se na adaptivne ovjese kod kojih se koeficijent prigušenja mijenja sporo (frekvencijski opseg je do 5 Hz) i pune poluaktivne ovjese kod kojih se koeficijent prigušenja mijenja vrlo brzo (frekvencijski opseg upravljanja je do 40 Hz). Promjenjivi koeficijent prigušenja moguće je postići mijenjanjem otvora prigušnice u nekoliko desetaka milisekundi, zatim korištenjem magnetoreoloških fluida koji pod utjecajem magnetskog polja mijenjaju viskoznost fluida unutar amortizera u milisekundnom području ili korištenjem elektoreoloških fluida koji pod utjecajem električnog polja mijenjaju viskoznost fluida [7, 8, 9]. Poluaktivni ovjesi omogućavaju znatno poboljšanje performansi vozila uz

pružanje visoke robusnosti, male (sekundarne) potrošnje energije i malih zahtjeva za snagom i pritom su relativno jeftini. Iz tih su razloga najšire primjenjivani tip mehatroničkih ovjesa.

Aktivni ovjesi, za razliku od poluaktivnih ovjesa koji djeluju pasivno (tj. rade dvokvadrantno), sastoje se od elektronički upravljanog aktuatora koji omogućava generiranje proizvoljne sile (četverokvadrantni rad, uključujući motorni režim rada) te svojim izravnim djelovanjem poboljšava performanse ovjesa. Aktivni ovjesi podrazumijevaju postojanje izvora energije poput pumpe, kompresora ili baterije i aktuatora poput pneumatskih i hidrauličkih cilindara ili elektromotora. Prvi aktivni ovjesi, koji su i danas zastupljeni, su samonivelirajući (eng. *self-leveling*, *load leveling*) ovjesi koji se najčešće sastoje od zračne opruge koja vrlo sporo mijenja svoj koeficijent krutosti i omogućava mijenjanje položaja ovješene mase u odnosu na cestu. Ovaj se tip ovjesa često koristi u sprezi s poluaktivnim ovjesom. Spori aktivni ovjesi sadrže elektrohidraulički aktuator u seriji s oprugom (bez opruge bi pri višim frekvencijama pobude došlo do krute veze između kotača i šasije) te omogućavaju generiranje sile u frekvenzijskom opsegu do 5 Hz. Primjer komercijalno uspješnog sporog aktivnog ovjesa je Mercedesov *ABC* (*Active Body Control*) koji je od 2013. godine proširen unaprijednim poznavanjem profila ceste i poznat je pod svojim komercijalnim nazivom *Magic Body Control* (*MBC*) [10]. Brzi aktivni ovjes, koji omogućava generiranje sile u frekvenzijskom opsegu višem od 20 Hz, zahtijeva brzi aktuator poput elektromotora. Prvi takav ovjes je napravila tvrtka *Bose*, korištenjem linearnih motora ali koncept nikada nije doživio komercijalni uspjeh vjerojatno zbog cijene i visokih zahtjeva za snagom i energijom. Međutim, zahvaljujući razvoju hibridnih električnih vozila zahtjevi za snagom i energijom postaju manje kritični, pa je tako 2017. godine predstavljen prvi komercijalni brzi aktivni ovjes, *Audi Active Suspension*, koji se sastoji od rotacijskih elektromotora snage 2 kW koji su povezani sa sponama ovjesa preko harmoničkog prijenosnika visokog prijenosnog omjera (1:80), a energiju crpe iz 48 V baterije koja se dijeli s ostatkom aktivnih uređaja [11, 12]. Kao i *Mercedes MBC*, *Audi Active Suspension* koristi stereokameru koja snima cestu do 20 m ispred vozila i generira informacije o profilu ceste te omogućava unaprijedno djelovanje koje dodatno poboljšava performanse vozila. Pretpostavlja se da će unaprijedno djelovanje biti sve više zastupljeno, čak i u obliku gdje se uz kamere koriste i detaljne mape cesta snimljene i osvježavane on-line korištenjem neuronskih mreža [13].

U drugom poglavlju rada predstavljeni su matematički modeli vertikalne dinamike vozila. Model vozila je četvrtinski model vozila s jednim i s dva stupnja slobode gibanja, s pasivnim,

aktivnim i poluaktivnim ovjesom te su predstavljeni stohastički i deterministički modeli podloge.

U trećem poglavlju provedena je sinteza regulacije aktivnog ovjesa. Dana je teorijska podloga linearnog kvadratičnog regulatora (LQR) u kontinuiranoj i diskretnoj domeni te je prikazan izvod unaprijednog regulacijskog djelovanja zasnovanog na unaprijednom poznavanju profila ceste. LQR s i bez unaprijednog regulacijskog djelovanja primjenjen je na četvrtinskim modelima s aktivnim ovjesom te je provedena analiza kovarijanci za model s jednim stupnjem slobode gibanja i za model s dva stupnja slobode gibanja. U istom je poglavlju provedeno više-kriterijsko optimiranje pojačanja regulatora primjenom genetskih algoritama.

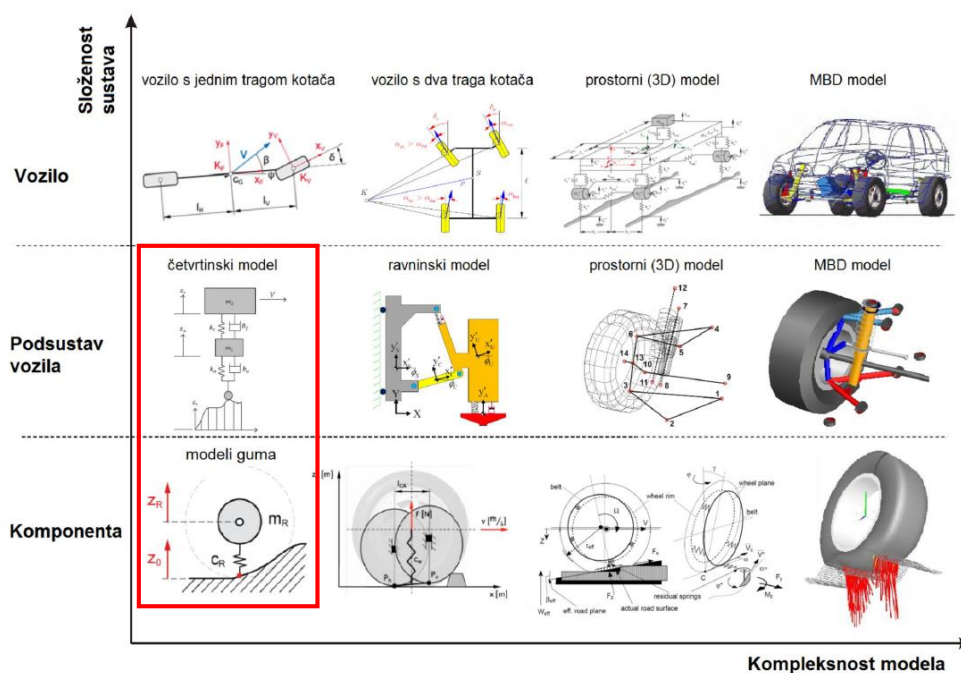
U četvrtom je poglavlju predstavljen sustav regulacije poluaktivnim ovjesom. Sustav regulacije poluaktivnog ovjesa zasniva se na primjeni ograničenja tipa pasivnosti na izlaz LQR aktivnog ovjesa. Pri daljnoj analizi broj podešenja regulatora je smanjen na temelju zaključaka donesenih u trećem poglavlju. U analizama su korišteni aktivni i poluaktivni ovjes s i bez unaprijednog regulacijskog djelovanja, a osim analize kovarijanci provedena je analiza u frekvencijskoj i vremenskoj domeni te su prikazani i diskutirani rezultati analiza.

U petom poglavlju rada prikazana je implementacija razvijenih sustava regulacije aktivnog i poluaktivnog ovjesa na puni model vozila u CarSim programskom paketu. Također, opisan je postupak prilagodbe karakteristika vozila te je provedena analiza u vremenskoj domeni za jedno podešenje regulatora u tri različita scenarija.

Zaključak s osvrtom na razvijene numeričke i simulacijske alate te prikazane performanse aktivnih i poluaktivnih ovjesa, uz moguća proširenja rada dani su u zadnjem poglavlju.

2. MATEMATIČKO MODELIRANJE VERTIKALNE DINAMIKE VOZILA

U vertikalnoj dinamici vozila primarno se analizira utjecaj vertikalne pobude, kao posljedice neravnina podloge, na vozilo i putnike u vozilu. Pritom se u analizi koriste modeli vozila, podsustava i komponenti različite kompleksnosti ovisno o primjeni, od modela s malim brojem koncentriranih parametrima do složenijih MDB (eng. *Multi Body Dynamics*) modela, prikazani na slici 1 [4]. Za sintezu sustava upravljanja aktivnim ovjesom koriste se modeli s koncentriranim parametrima jer pružaju uvid u utjecaj osnovnih parametara vozila na glavne performanse samog vozila, jednostavno se opisuju pomoću običnih diferencijalnih jednadžbi i mogu se dodatno pojednostaviti. Modeli s koncentriranim parametrima dijele se na pune modele vozila koji sadrže minimalno sedam stupnjeva slobode gibanja (vertikalno gibanje svih neovješanih masa, tri glavna gibanja ovještene mase – vertikalno gibanje, poniranje i valjanje), polovinske modele vozila koji sadrže do četiri stupnja slobode gibanja (vertikalno gibanje dvije neovještene mase, vertikalno gibanje ovještene mase te poniranje i eventualno valjanje iste) i četvrtinske modele vozila koji najčešće sadrže dva stupnja slobode gibanja (vertikalno gibanje neovještene i ovještene mase) [4; 7, pog. 22]. Ukoliko se pretpostavi da se kotači gibaju zasebno, tj. da nema sprežanja dinamike između kotača (postoji kada se koristi poprečni stabilizator (eng. *anti-roll bar*)) ili se ona zanemaruje, za analizu i sintezu aktivnog ovjesa pogodno je koristiti najjednostavniji, četvrtinski model vozila. Vertikalna pobuda može se modelirati (vidi potpoglavlje 2.2) ili se mogu koristiti realni, snimljeni profili cesta.



Slika 1. Usporedba matematičkih modela u vertikalnoj dinamici vozila [4]

2.1. Četvrtinski model vozila

Četvrtinski model vozila je najčešće korišteni matematički model vozila u opisu vertikalne dinamike. Četvrtinski se model može dodatno podijeliti na model s jednim stupnjem slobode gibanja, koji se vrlo često koristi za početne analize ovjesa a sastoji se od ovješene mase i ovjesa (dan u odjeljku 2.1.1) i na model s dva stupnja slobode gibanja (dan u odjeljku 2.1.2) koji se koristi za detaljnije analize ovjesa jer je bliži stvarnom vozilu. Model s dva stupnja slobode gibanja sastoji se od neovješene i ovješene mase vozila koje su međusobno povezane elastično-prigušnim elementima (oprugama i amortizerima) i aktuatorom, dok je neovješena masa povezana s podlogom preko modela gume. Ovješena masa u modelu predstavlja dio ovješene mase punog vozila koji opterećuje određeni kraj vozila¹. Neovješena masa predstavlja masu jednog kotača i pripadajućih elemenata ovjesa.

Četvrtinski model vozila s dva stupnja slobode gibanja općenito može biti nelinearan ili linearan. Nelinearnosti se u model mogu uvesti preko zakona upravljanja (npr. poluaktivni ovjes), nelinearnog parametriranja opruge i amortizera, modeliranjem dinamike odvajanja kotača od podloge, modeliranjem graničnih odbojnika, nelinearnim modelom gume i sl. Međutim, nelinearni model otežava sintezu sustava upravljanja aktivnim ovjesom (osim kada se radi o nelinearnoj strategiji upravljanja, vidi uvod u poglavlje 3) pa se za sintezu koristi linearni model.

Linearni model uvodi sljedeće pretpostavke:

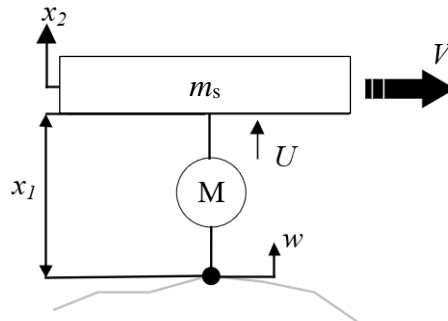
- Amortizer i opruga imaju linearne karakteristike tj. opisani su konstantnim parametrom
- Sve se nelinearnosti, poput odvajanja kotača od podloge, zanemaruju.
- Kontakt pneumatika i podloge je u točki. Ovo vrijedi i za općeniti, nelinearni model ukoliko se ne koriste napredniji modeli gume, pa se kontaktna površina mora emulirati npr. filtriranjem snimljenog profila ceste *moving average* filterima ako želimo realnije ponašanje sustava
- Pneumatik se modelira kao vertikalno postavljena opruga s konstantnim koeficijentom krutosti. Ova je pretpostavka opravdana jer se pneumatici ponašaju kao opruge u području frekvencija do 30 Hz [14], koje je ujedno i područje frekvencija od interesa.

U nastavku poglavlja postavljeni su matematički modeli četvrtinskog modela vozila i modela podloge.

¹ Ovješena masa u modelu nije jednaka četvrtini mase punog vozila, već ovisi o položaju težišta

2.1.1. Model vozila s jednim stupnjem slobode gibanja

Model vertikalne dinamike vozila s jednim stupnjem slobode gibanja prikazan je na slici 2. Sastoji se od ovještene mase i aktuatora dok je neovješena masa izostavljena.



Slika 2. Model s jednim stupnjem slobode gibanja

Matematički model izvodi se primjenom zakona dinamike, čime dobivamo diferencijalnu jednadžbu drugog reda. Uvođenjem varijabli stanja model se može zapisati pomoću dvije diferencijalne jednadžbe prvog reda [6; 7, pog. 31]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - w \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}\tag{2.1}$$

gdje je x_1 hod ovjesa, x_2 vertikalna brzina ovještene mase, u normirana sila s obzirom na masu, tj. $u=U/m_s$ gdje je U sila aktuatora, m_s masa ovještene mase. Ulaz u model je vertikalna brzina ceste w koja se modelira zasebno (vidi potpoglavlje 2.2). Težina ovještene mase ovdje se ne uzima u obzir jer g predstavlja konstantan pomak sile tj. akceleracije (nema dinamičko djelovanje te se može izravno poništiti djelovanjem regulatora kroz u).

Jednadžbe (2.1) mogu se prikazati u obliku prostora stanja, koji je općenito dan izrazom:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{G}w\tag{2.2}$$

pa se model (2.1) može prepisati obliku prostora stanja (2.2) kao:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} w\tag{2.3}$$

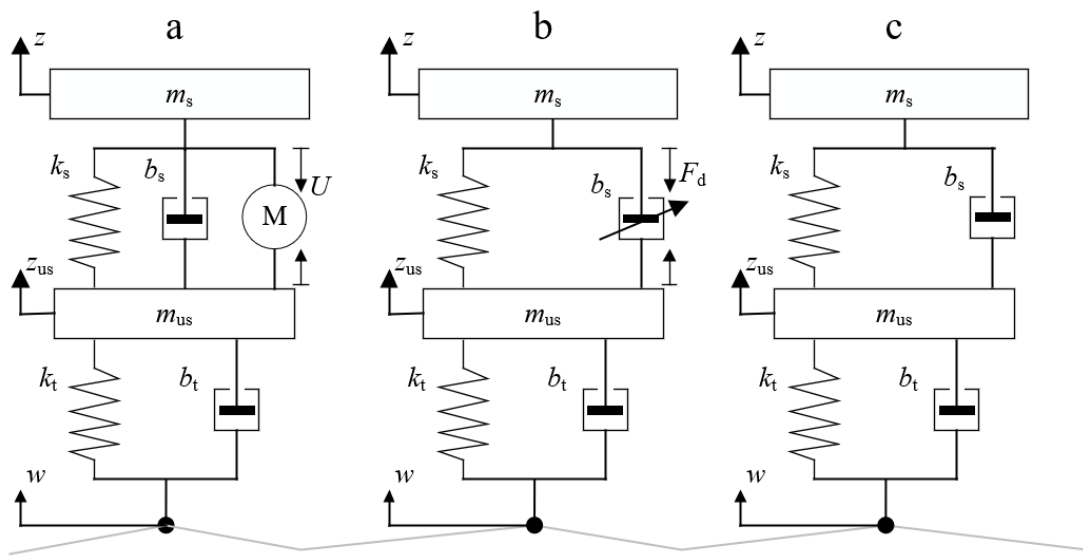
Ukoliko u model (2.3) želimo uvesti trzaj (druga derivacija brzine, prva derivacija ubrzanja), ubrzanje ovještene mase definiramo kao novo stanje x_3 , tj. $\dot{x}_2 = u \triangleq x_3$. Tada uvodimo i novu upravljačku varijablu u_1 tako da derivacija normirane sile u postane nova upravljačka varijabla, tj. $\dot{x}_3 = \dot{u} = u_1$ [6, 31].

Prostor stanja (2.3) je tada proširen za jednu varijablu stanja i jednak je:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B u_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_G w \quad (2.4)$$

2.1.2. Model vozila s dva stupnja slobode gibanja

Napredniji i češće korišteni model ima dva stupnja slobode gibanja i prikazan je na slici 3. Sadrži dinamiku ovještene mase i prethodno izostavljene neovještene mase koje međusobno mogu biti spregnute pasivnim (Slika 3 c), polu-aktivnim (Slika 3 b) ili aktivnim ovjesom (Slika 3 a) [5, 15, 16].



Slika 3. Model s dva stupnja slobode gibanja s a) punim aktivnim ovjesom, b) poluaktivnim ovjesom, c) pasivnim ovjesom

Matematički model s dva stupnja slobode gibanja (2DoF, eng. *2 Degrees of Freedom*) predstavljen je s dvije diferencijalne jednačbe drugog reda:

$$\begin{aligned} m_u \ddot{z}_u &= -k_t(z_u - z_r) - b_t(\dot{z}_u - \dot{z}_r) + k_s(z_s - z_u) + b_s(\dot{z}_s - \dot{z}_u) + U - m_u g \\ m_s \ddot{z}_s &= -k_s(z_s - z_u) - b_s(\dot{z}_s - \dot{z}_u) - U - m_s g \end{aligned} \quad (2.5)$$

gdje su z_u , z_s , z_r redom položaj neovještene mase, ovještene mase i podloge, \dot{z}_u , \dot{z}_s , \dot{z}_r brzina neovještene mase, brzina ovještene mase i brzina podloge, a \ddot{z}_u , \ddot{z}_s su ubrzanje neovještene mase i ubrzanje ovještene mase. Članovi $m_u g$ i $m_s g$ su težine neovještene i ovještene mase dok je sila U aktivna sila. U slučaju pasivnog ovjesa, aktivna sila je jednaka nuli, dok je u slučaju polu-aktivnog ovjesa aktivna sila jednaka sili promjenjivog prigušivača F_d , a koeficijent prigušenja amortizera b_s jednak nuli. Parametri modela preuzeti su iz [6, 16] te su dani u tablici 1.

Tablica 1. Parametri modela s dva stupnja slobode gibanja

Parametar	Simbol	Iznos i mjerna jedinica
neovješena masa	m_u	40 kg
ovješena masa	m_s	400 kg
vertikalna krutost pneumatika	k_t	157910 N/m
koeficijent prigušenja pneumatika	b_t	0 Ns/m
vertikalna krutost opruge	k_s	15791 N/m
koeficijent prigušenja amortizera	b_s	1508 Ns/m

Za potrebe frekvencijske analize i sinteze linearnog kvadratičnog regulatora (LQR, eng. *Linear Quadratic Regulator*) dinamički model (2.5) treba biti zapisan u obliku prostora stanja. Pritom se, kako je već spomenuto u odjeljku 2.1.1, izostavlja utjecaj gravitacijskog djelovanja te se uvode sljedeće varijable stanja:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= z_u - z_r & [\text{m}] & \text{deformacija pneumatika} \\
 x_2 &= \dot{z}_u & [\text{m/s}] & \text{vertikalna brzina neovještene mase} \\
 x_3 &= z_s - z_u & [\text{m}] & \text{deformacija ovjesa} \\
 x_4 &= \dot{z}_s & [\text{m/s}] & \text{vertikalna brzina ovještene mase}
 \end{aligned}$$

Upravljačka varijabla u jednaka je sili aktuatora U , a w je vertikalna brzina ceste. Jednadžbe (2.5) u obliku prostora stanja glase:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_t}{m_u} & -\frac{(b_s + b_t)}{m_u} & \frac{k_s}{m_u} & \frac{b_s}{m_u} \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{b_s}{m_s} & -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{b_s}{m_s} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_u} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_s} \end{bmatrix}}_B U + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{b_t}{m_u} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_G w \quad (2.6)$$

Izraz (2.6) se može pojednostavniti izostavljanjem opruge i amortizera ($k_s = 0$ i $b_s = 0$) pošto su njihove karakteristike poznate pa ih možemo uključiti u upravljačku silu (eng. *feedforward* kompenzacija) čime se sinteza regulatora bitno pojednostavljuje uz (teorijski) isti rezultat [6, 17]. Pojednostavljeni model je tada dan izrazom:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_t}{m_u} & -\frac{b_t}{m_u} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_u} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_s} \end{bmatrix}}_B U + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{b_t}{m_u} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_G w \quad (2.7)$$

Stacionarno stanje ovjesa dobiva se izjednačavanjem vremenskih derivacija u izrazu (2.5) s nulom i time se dobivaju početna deformacija pneumatika x_{10} i hoda ovjesa x_{30} koje su posljedica gravitacijskog djelovanja:

$$\begin{aligned} x_{10} &= z_{us0} - z_{r0} = -\frac{(m_s + m_u)g}{k_t} \\ x_{30} &= z_{s0} - z_{us0} = -\frac{m_s g}{k_s} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Pri implementaciji modela u simulacijskom okruženju potrebno je obratiti pažnju na varijable stanja koje se dovode u regulator. Naime, regulatori izvedeni na temelju modela (2.6) i (2.7) koriste deformaciju pneumatika i hod ovjes u odnosu na stacionarno stanje. Stoga je, ukoliko je prisutno gravitacijsko djelovanje, potrebno od varijabli stanja x_1 i x_3 oduzeti početne deformacije definirane izrazom (2.8).

Prirodne frekvencije ovješene mase $\omega_{n,s}$ i neovješene mase $\omega_{n,us}$ te relativni koeficijent prigušenja ovješene mase ζ_s mogu se približno izračunati primjenom izraza [6]:

$$\begin{aligned} \omega_{n,s} &\approx \sqrt{\frac{k_s}{m_s}} \\ \omega_{n,us} &\approx \sqrt{\frac{k_t}{m_u}} \\ \zeta_s &\approx \frac{b_s}{2m_s \omega_{n,s}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Uz parametre dane u tablici 1, za pasivno vozilo prirodne frekvencije iznose $f_{n,s}=1$ Hz, $f_{n,us}=10$ Hz, a relativni koeficijent prigušenja ovješene i neovješene mase $\zeta_s = \zeta_{us} = 0,3$. Na temelju polova sustava (vidi izraz (3.35)) dobivaju se točniji iznosi frekvencija $f_{n,s}=0,97$ Hz, $f_{n,us}=10,3$ Hz, i relativnih koeficijenata prigušenja $\zeta_s = 0,262$ i $\zeta_{us} = 0,294$.

2.2. Vrste i matematički modeli profila ceste

Vertikalni profil (izdizaj) ceste ili njegova prva derivacija u vertikalnoj dinamici vozila predstavljaju ulaznu varijablu u model. Modeli cesta se obično dijele u dvije kategorije: 1) stohastički modeli ceste koji opisuju hrapavost kolnika i 2) deterministički modeli ceste koji opisuju istaknute izbočine ili ulegnuća, koji su relativno kratki tj. dani u visoko- ili srednje-frekvencijskom području, ili istaknute duže, nisko-frekvencijske nepravilnosti poput dužih uspona (npr. mostova) ili dužih ulegnuća.

2.2.1. Stohastički opis ceste

Hrapavi kolnici bez izraženih kratkih izbočina ili ulegnuća po prirodi su stohastički i imaju normalnu (Gaussovu) razdiobu te se često opisuju aproksimacijom spektralne gustoće snage pomaka ceste S_{z_r} (eng. *Power spectrum density*) [7, pog. 28 i 29; 6]:

$$S_{z_r}(\Omega) = \frac{A}{\Omega^n} \quad (2.10)$$

gdje je Ω [rad/m] valni broj (recipročna vrijednost valne duljine tj. frekvencija u prostornoj domeni), n je koeficijent valovitosti te se najčešće uzima $n = 2$ jer vrlo dobro opisuje snimljene profile cesta [7, pog. 28; 6] i A (m²/(rad/m)) predstavlja koeficijent koji određuje hrapavost kolnika. Vrijednosti parametra A mogu se pronaći u ISO:8606 normi. S obzirom da je ulaz u modele predstavljene u prostoru stanja vertikalna brzina ceste w (vidi modele (2.3), (2.6) i (2.7)) potrebno je pretvoriti (2.10) u spektralnu gustoću snage vertikalne brzine ceste. Međutim, prvo je potrebno izraz (2.10) prebaciti iz prostorne domene u vremensku domenu. Veza između prostorne i vremenske domene definirana je sljedećim izrazima:

$$x(t) = Vt, \quad \Omega = \frac{\omega}{V} \quad (2.11)$$

gdje je $x(t)$ prostorna koordinata, V je longitudinalna brzina vozila, a ω (rad/s) je frekvencija u vremenskoj domeni. Uz pretpostavku da je longitudinalna brzina vozila konstantna, veza između spektralne gustoće snage pomaka ceste u prostornoj i vremenskoj domeni jednaka je:

$$S_{z_r}(\omega) = \frac{1}{V} S_{z_r}(\Omega) \quad (2.12)$$

koja je uz uvrštavanje izraza (2.10) i postavljanjem $n=2$ zatim jednaka:

$$S_{z_r}(\omega) = \frac{1}{V} \frac{A}{\left(\frac{\omega}{V}\right)^2} = \frac{AV}{\omega^2} \quad (2.13)$$

Veza između spektralne gustoće snage pomaka i brzine općenito je dana izrazom [17]:

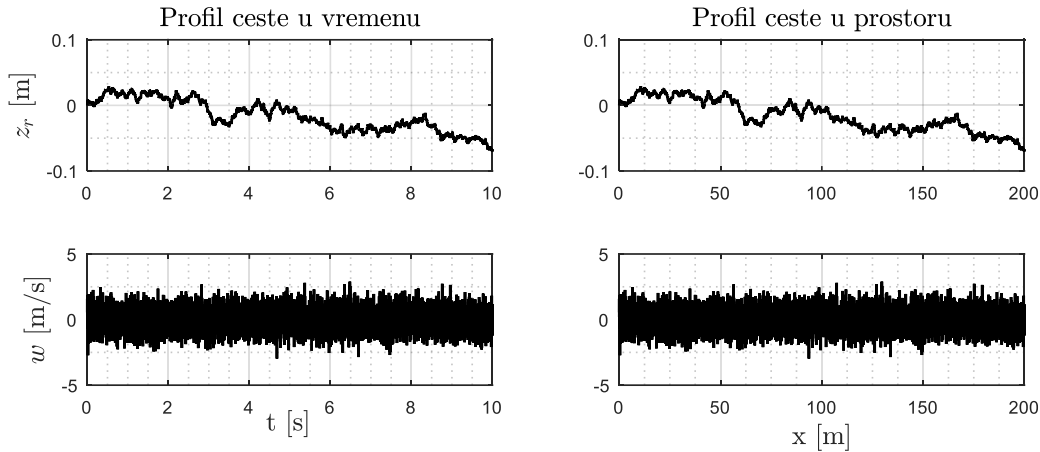
$$S_{\dot{z}_r}(\omega) = \omega^2 S_{z_r}(\omega) \quad (2.14)$$

Uvrštavanjem (2.13) u (2.14) dobivamo spektralnu gustoću snage brzine ceste:

$$S_{\dot{z}_r}(\omega) = \omega^2 \frac{AV}{\omega^2} = AV \quad (2.15)$$

iz čega slijedi da je spektralna gustoća snage brzine podloge konstantna za sve frekvencije tj. da je vertikalna brzina podloge bijeli šum intenziteta AV .

Primjer stohastičkog profila ceste, dobiven integriranjem u vremenu bijelog šuma brzine podloge w s koeficijentom hrapavosti kolnika $A = 4,9 \cdot 10^{-6}$ i uzdužnom brzinom $V = 20$ m/s prikazan je na slici 4. Osim ovdje navedenog stacionarnog Gaussovog modela, koji vrlo dobro opisuje većinu profila ali nije potpuno precizan, postoje i drugi modeli koji bolje opisuju stvarne profile, poput modela s dva koeficijenta valovitosti, tzv. MIRA (eng. *Motor Industry Research Association*) model [18]. Također, realniji stohastički profili cesta se mogu dobiti integriranjem "obojenog" šuma, tj. bijelog šuma koji se propušta kroz filter prvog reda [7 pog. 28 i 29].



Slika 4. Primjer stohastičkog profila generiran integriranjem bijelog šuma

2.2.2. Deterministički opis ceste

Deterministički profili ceste, izbočina ili ulegnuća najčešće se modeliraju kontinuiranim funkcijama. Jedan od najčešće korištenih modela za izbočine je tzv. kosinusni model, predstavljen u vremenskoj domeni izrazom [15]:

$$z_r(t) = \begin{cases} \frac{h}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T_{izb}} t\right) \right], & \text{za } t_b \leq t \leq t_b + T_{izb} \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad (2.16)$$

gdje je h [m] visina izbočine, t_b vrijeme pojavljivanja izbočine, a $T_{izb} = L_{izb} / V$ [s] duljina izbočine u vremenskoj domeni uz stvarnu (prostornu) duljinu danu s L_{izb} [m]. Kako je već ranije spomenuto, ulaz u modele je brzina ceste w te deriviranjem izraza (2.16) dobivamo brzinu ceste:

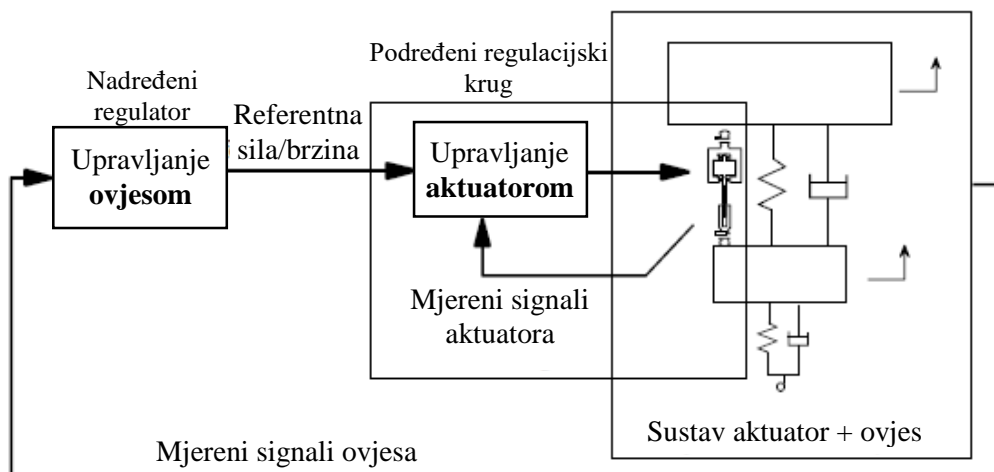
$$w(t) = \begin{cases} \frac{h\pi}{T_{izb}} \sin\left(\frac{2\pi}{T_{izb}} t\right), & \text{za } t_b \leq t \leq t_b + T_{izb} \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad (2.17)$$

Primjer kosinusnog modela izbočine dan u poglavlju 4., na slici 28.

3. SUSTAV REGULACIJE AKTIVNOG OVJESA

Kako je bilo rečeno u uvodnom poglavlju ovog rada, aktivni i poluaktivni ovjes sadrže upravljivi aktuator te će performanse cjelokupnog sustava uvelike ovisiti o strategiji upravljanja ovjesom. Generalno gledano, upravljanje ovjesom dijeli se na dvije razine: nadređenu i podređenu, koje su shematski prikazane na slici 5 [7, pog. 22]. Nadređena razina upravlja cjelokupnim ovjesom vozila, preciznije rečeno, uzima sve mjerene signale vezane uz stanje ovjesa (hod ovjesa, relativne brzine i sl.) na svakom kraju vozila i mjerene signale vezane uz gibanje ovještene mase (ubrzanja u svim smjerovima, položaj pedale gasa i kočnice, kut zakreta volana i sl.), te na temelju mjerenja zadaje referentnu silu (ili brzinu, poziciju) aktuatoru na svaki kraj vozila. Ista nadređena razina upravljanja može se primjeniti na bilo koji tip ovjesa (aktivni/poluaktivni) ukoliko su dostupni potrebni senzori. Također, nadređena strategija upravljanja ovjesom vrlo često je samo dio upravljačkog sustava cjelokupnom dinamikom vozila [20]. Podređena razina upravlja samim aktuatorom i osigurava asimptotsko praćenje zadane referentne veličine. Ova razina upravljanja ovisi o tipu i karakteristikama aktuatora, a više informacija o podređenoj razini upravljanja može se pronaći u [7, pog. 22].

Osim upravljanja, vrlo bitan aspekt pri samoj realizaciji aktivnog ili poluaktivnog ovjesa je i estimacija varijabli stanja koje nisu izravno mjerljive. Estimacija stanja vezanih uz samo vozilo provodi se najčešće primjenom klasičnog ili proširenog Kalmanovog filtera [7, pog 31], dok je estimacija profila ceste iz snimki dobivenih stereokamerom ili laserom kompliciranija i njena točnost ovisi o točnosti estimacije stanja vozila [21].



Slika 5. Poopćeni shematski prikaz nadređenog i podređenog upravljanja aktivnim ovjesom [7, pog. 22]

U ovom je radu naglasak na nadređenoj strategiji upravljanja (sustavu regulacije) aktivnim i poluaktivnim ovjesom uz sljedeće pretpostavke:

- Senzori su idealni, tj. zanemaruje se šum mjerenja i dinamika senzora.
- Sve potrebne varijable stanja su mjerljive ili ih je moguće rekonstruirati na temelju ostalih mjerenja estimatorom. Estimatori ovdje nisu dizajnirani ni modelirani.
- Aktuator je idealan, tj. zanemaruje se utjecaj dinamike aktuatora i njegovih ograničenja (osim određenih ograničenja kod poluaktivnog ovjesa).
- Pobuda je ograničena na vertikalnu pobudu uzrokovanu neravnom podloge, dok druge pobude uzrokovane ubrzavanjem, kočenjem ili vožnjom u zavoju nisu razmatrane jer se podrazumijeva da su longitudinalna i lateralna akceleracija te longitudinalna brzina mjerljive i da su informacije o položaju pedale gasa, kočnice i kuta zakreta volana dostupne. Na temelju njihova poznavanja moguće je potpuno eliminirati poremećaje uzrokovane ubrzavanjem, kočenjem i vožnjom u zavoju pomoću unaprijednog djelovanja (eng. *feedforward*), koje ovdje nije dizajnirano [3].

Nadređena strategija upravljanja može biti izvedena na više različitih načina. Jedna od popularnijih strategija je *Skyhook* strategija upravljanja koja emulira rad amortizera smještenog između ovješene mase i virtualne čvrste točke iznad vozila, kolokvijalno rečeno "neba" (vidi odjeljak 3.2 i poglavlje 4), no problem ove strategije je što se fokusira na udobnost vožnje [5] bez da uzima u obzir ograničenje hoda ovjesa i upravljivost vozilom. Drugi popularan pristup je linearno kvadratično optimalno upravljanje koje na sistematičan način omogućava dobivanje optimalnog regulatora kojim se postiže zadovoljavajući, optimalni kompromis između udobnosti vožnje i upravljivosti vozilom [6, 15, 21]. Linearni kvadratični regulator može se proširiti primjenom unaprijedne informacije o profilu podloge [22, 23, 24], koja je razvojem senzora i računala sve više zastupljena u modernim aktivnim ovjesima [10, 11]. U ovom je radu napravljena sinteza nadređenog upravljanja koja se zasniva na linearnom kvadratičnom regulatoru s i bez primjene unaprijedne informacije o profilu podloge. Osim navedene dvije strategije, koriste se i nelinearne strategije upravljanja poput robusnog i adaptivnog upravljanja [3] te u novije vrijeme i modelsko prediktivno upravljanje [16, 25] za koje nije nužno imati model u linearnom obliku.

3.1. Linearno kvadratično optimalno upravljanje

Linearno kvadratično optimalno upravljanje jedan je od najšire primjenjenih koncepata iz teorije optimalnog upravljanja te predstavlja jednu od najznačajnijih primjena optimalnog upravljanja. Općenito je optimalno upravljanje univerzalan okvir za sintezu upravljanja multivarijabilnih dinamičkih sustava ali nije zastupljeno u praktičnim primjenama s punim opsegom svojih mogućnosti osim u slučaju gdje postoje "analitička" rješenja, kao što je problem regulacije linearnih sustava s kvadratnim kriterijem optimalnosti [26]. Glavni razlog neprimjenjivosti je matematička kompleksnost nužnih uvjeta optimalnosti.

Jedan dio teorije optimalnog upravljanja bavi se traženjem optimalnog vektora upravljanja koji je funkcija vektora stanja, drugim riječima, načinom kako dobiti optimalno upravljanje s povratnom vezom, tj. optimalni regulator. Dinamičko programiranje, preciznije rješenje Hamilton-Jacobi-Bellmanove parcijalne diferencijalne jednačbe, daje optimalni vektor upravljanja s povratnom vezom. Sinteza linearnog kvadratičnog regulatora može se provesti primjenom Hamilton-Jacobi-Bellmanove jednačbe za minimizaciju linearne kvadratične funkcije cilja i kao rezultat sinteze, za opći linearni vremenski varijantni sustav, dobivamo Riccatijevu matričnu diferencijalnu jednačbu koja za vremenski invarijantni sustav postaje algebarska matrična jednačba. Rješenje Riccatijeve jednačbe koristi se u izračunu matrice optimalnih pojačanja. U nastavku potpoglavlja su dani glavni izrazi za linearni kvadratični regulator, dok se puni izvod može pronaći u literaturi [26, 27, 28].

Prilikom sinteze linearnog kvadratičnog regulatora uvode se određene pretpostavke. Dvije najvažnije pretpostavke su:

- matematički model objekta upravljanja je u potpunosti poznat,
- vektor stanja je mjerljiv ili se može rekonstruirati estimatorom,

Matematički model objekta upravljanja za sintezu linearnog kvadratičnog regulatora mora biti dan u obliku prostora stanja, tj. u obliku izraza (2.2).

3.1.1. Deterministički i stohastički linearni kvadratični regulator

Linearni kvadratični regulator (LQR) je regulator po varijablama stanja s optimalnim pojačanjima. Optimalna pojačanja determinističkog LQR na beskonačnom horizontu dobivaju se minimiziranjem linearne kvadratične funkcije cilje J [27]:

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R}_c \mathbf{u}(t)) dt \quad (3.1)$$

gdje je $\mathbf{x}(t)$ vektor stanja, \mathbf{Q}_c je pozitivna semidefinitna simetrična težinska matrica koja penalizira varijable stanja, $\mathbf{u}(t)$ je vektor upravljanja i \mathbf{R}_c je pozitivno-definitna simetrična težinska matrica koja penalizira upravljačke varijable. Vektor upravljanja koji minimizira funkciju cilja (3.1) ima oblik:

$$\mathbf{u}(t) = -(\mathbf{R}_c^{-1} \mathbf{B}_c^T \mathbf{P}_c) \mathbf{x}(t) = -\mathbf{K}_c \mathbf{x}(t) \quad (3.2)$$

gdje je \mathbf{B}_c matrica ulaza sustava, a \mathbf{P}_c realna simetrična pozitivno definitna matrica koja zadovoljava algebarsku Riccatijevu jednadžbu (ARE):

$$\mathbf{P}_c \mathbf{B}_c \mathbf{R}_c^{-1} \mathbf{B}_c^T \mathbf{P}_c - \mathbf{P}_c \mathbf{A}_c - \mathbf{A}_c^T \mathbf{P}_c - \mathbf{Q}_c = 0 \quad (3.3)$$

gdje je \mathbf{A}_c matrica koeficijenata sustava. Jedinstveno rješenje ARE postoji jedino ako je sustav upravljiv.

U slučaju da podintegralna funkcija indeksa J sadrži i mješoviti član koji veže varijable stanja i vektor upravljanja preko matrice \mathbf{N}_c , tj. kada ciljna funkcija ima oblik:

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q}_c \mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}(t)^T \mathbf{N}_c \mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R}_c \mathbf{u}(t)) dt \quad (3.4)$$

optimalni vektor upravljanja ima oblik:

$$\mathbf{u}(t) = -(\mathbf{R}_c^{-1} \mathbf{B}_c^T \mathbf{P}_c + \mathbf{N}_c^T) \mathbf{x}(t) = -\mathbf{K}_c \mathbf{x}(t) \quad (3.5)$$

gdje je \mathbf{P}_c rješenje sljedeće algebarske Riccatijeve jednadžbe:

$$(\mathbf{P}_c \mathbf{B}_c + \mathbf{N}_c) \mathbf{R}_c^{-1} (\mathbf{B}_c^T \mathbf{P}_c + \mathbf{N}_c^T) - \mathbf{P}_c \mathbf{A}_c - \mathbf{A}_c^T \mathbf{P}_c - \mathbf{Q}_c = 0 \quad (3.6)$$

U slučaju prisutnosti stacionarnih stohastičkih signala Gaussove razdiobe u prostoru stanja, kakav je slučaj kod ovjesa pobuđenih stohastičkom podlogom, nije moguće minimizirati integral (3.1), tj. integral (3.4) [27], već se minimizira očekivana vrijednost integrala:

$$\min \left[PI = E(\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_c \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}_c \mathbf{u} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{N}_c \mathbf{u}) \right] \quad (3.7)$$

Optimalni vektor upravljanja koji minimizira funkciju cilja (3.7) ima isti oblik kao i za determinističku funkciju cilja (3.4) te je dan izrazima (3.5) i (3.6). Naziv za ovakav tip regulatora je LQG (eng. *Linear Quadratic Gaussian*). Općenito se LQG regulacija primjenjuje

kao kombinacija Kalmanovog filtera (tj. linearnog kvadratičnog estimatora) sa linearnim kvadratičnim regulatorom i koristi se u slučaju kada su sustavi pobuđeni bijelim šumom i kada ne mjerimo cijeli vektor stanja već ga estimiramo Kalmanovim filterom. Prema teoremu separacije, sinteza linearnog kvadratičnog regulatora i linearnog kvadratičnog estimatora mogu se provesti odvojeno. Na temelju toga možemo dizajnirati linearni kvadratični regulator i primjeniti ga na sustavu koji je pobuđen bijelim šumom, bez potrebe za potpunim vektorom stanja, uz pretpostavku optimalnog estimiranja vektora stanja.

Dinamika zatvorenog regulacijskog kruga se kod linearnog kvadratičnog regulatora ne namješta izravno kao kod metode podešavanja polova, već je ona posljedica odabira težinskih koeficijenata u matricama \mathbf{Q}_c i \mathbf{R}_c . Matricom \mathbf{Q}_c oblikujemo prijelazni proces vektora stanja \mathbf{x} , gdje većim elementima matrice odgovara manja pogreška regulacije odgovarajuće varijable stanja jer se dobivaju veći iznosi pojačanja \mathbf{K} koji pomiču polove sustava ulijevo. Matricom \mathbf{R}_c se utječe na iznos energije upravljanja gdje većim elementima matrice odgovara manje forsiranje upravljačke varijable te manja energija upravljanja jer su iznosi pojačanja manji. U slučaju kada nemamo mješoviti član \mathbf{N}_c , dinamiku zatvorenog regulacijskog kruga određuje omjer težinskih koeficijenata $\mathbf{Q}_c/\mathbf{R}_c$. To omogućava da jedan od težinskih koeficijenata zadržimo konstantnim (najčešće se izjednačava s jedinicom) a drugi se mijenja, čime se smanjuje broj mogućih kombinacija težinskih koeficijenata. Postupak odabira težinskih koeficijenata je iterativan, dizajner mora sam izabrati vrijednosti težinskih koeficijenata kojima dinamika sustava postiže tražene performanse.

3.1.2. Analiza kovarijanci

Kako je pokazano u poglavlju 2, stohastički model ceste je bijeli šum poznatog inteziteta. Za promatranje performansi aktivnog ovjesa koji je pobuđen bijelim šumom može se koristiti jedna od poznatih metoda dobivanja performansi linearnih sustava pobuđenih šumom, a to je analiza kovarijanci (eng. *Covariance analysis*). Varijanca je očekivana vrijednost kvadrata razlike slučajne varijable i njezine srednje vrijednosti. Pošto je srednja vrijednost bijelog šuma normalne raspodjele jednaka nuli, varijanca bijelog šuma jednaka je srednjem kvadratu bijelog šuma, a korijen varijance bijelog šuma bit će jednak korijenu srednjeg kvadrata, tj. standardnoj devijaciji koja je uz nultu srednju vrijednost jednaka RMS vrijednosti (eng. *Root Mean Square*).

Razmatramo općeniti linearni sustav:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{v} \quad (3.8)$$

gdje je \mathbf{x} vektor varijabli stanja, a \mathbf{v} je stacionarni, stohastički signal sa srednjom vrijednosti jednakoj nuli (bijeli šum), za koji vrijedi $E[\mathbf{v}\mathbf{v}^T] = \mathbf{Q}_w\delta(t-\tau)$, gdje je \mathbf{Q}_w općenito matrica spektralne gustoće snage signala. U ovom radu je \mathbf{Q}_w skalar jer imamo jedan ulaz u model (w). Ukoliko su realni dijelovi svojstvenih vrijednosti matrice \mathbf{F} negativni ($\text{Re } \lambda(\mathbf{F}) < 0$), što za linearni sustav u prostoru stanja znači da je sustav stabilan, očekivana vrijednost vektora stanja \mathbf{x} jednaka je $E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T] = \mathbf{X}$, gdje je \mathbf{X} jedinstveno rješenje jednadžbe varijanci [27, pog. 8; 28, pog 10]:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}_w\mathbf{G} \quad (3.9)$$

Rješavanjem jednadžbe varijanci (3.9) dobivamo matricu kovarijanci stanja \mathbf{X} koja na dijagonali sadrži varijance varijabli stanja. Matrica kovarijanci stanja u općenitom slučaju, gdje su matrice \mathbf{F} i \mathbf{G} promjenjive u vremenu, opisuje promjenu kovarijance u vremenu. Za vremenski invarijantne sustave, koji se promatraju u ovome radu, gdje su matrice \mathbf{F} , \mathbf{G} i \mathbf{Q}_w konstantne, jednadžba varijanci (3.9) poprima oblik sličan Lyapunovljevoj jednadžbi:

$$0 = \mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}_w\mathbf{G} \quad (3.10)$$

Rješenje jednadžbe (3.10) tj., matrica kovarijanci stanja \mathbf{X} je konstantna.

Izlaz sustava definiran je pomoću vektora stanja \mathbf{x} i matrice izlaza \mathbf{C} :

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (3.11)$$

Matricu kovarijanci izlaza \mathbf{Y} dobivamo računanjem očekivane vrijednosti izlaza:

$$E[\mathbf{y}\mathbf{y}^T] = E[\mathbf{C}\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{C}^T] \quad (3.12)$$

Kako je matrica izlaza konstantna te kako vrijedi da je očekivana vrijednost umnoška $\mathbf{x}\mathbf{x}^T$ jednaka matrici kovarijanci stanja \mathbf{X} , slijedi da je matrica kovarijanci izlaza jednaka:

$$\mathbf{Y} = E[\mathbf{y}\mathbf{y}^T] = \mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{C}^T \quad (3.13)$$

Sličnim postupkom tj. proširenjem vektora \mathbf{y} i matrice \mathbf{C} moguće je izračunati i kovarijance ostalih linearnih kombinacija vektora stanja.

3.1.3. Indeksi performansi aktivnog ovjesa

Prilikom sinteze sustava regulacije aktivnog ovjesa potrebno je definirati indekse performansi aktivnog ovjesa. Općenito se prilikom dizajna ovjesa želi postići što veća udobnost vožnje uz što veću upravljivost vozilom pritom zadovoljavajući ograničeni hod ovjesa.

3.1.3.1. Udobnost

Udobnost vožnje (eng. *Ride comfort*) ovisi o ljudskoj percepciji te je ocjena udobnosti vožnje subjektivna. Međutim, brojne studije [3; 6; 7, pog. 29] su pokazale da postoji visoka korelacija između subjektivnih ocjena udobnosti vožnje i vertikalnog ubrzanja ovještene mase, preciznije standardne devijacije vertikalnog ubrzanja ovještene mase. Kriterij udobnosti moguće je proširiti i poboljšati uključivanjem vertikalnog trzaja (prve derivacije ubrzanja ovještene mase) pored same akceleracije, čime se znatnije naglašava utjecaj visoko-frekvencijskih poremećaja. Sljedeće poboljšanje, koje je bitnije sa stanovišta putnika, uzima u obzir osjetljivost čovjeka na frekvenciju pobude i trajanje izloženosti vibracijama, a to je objedinjeno ISO 2631 standardom. Prema ISO 2631 ljudsko tijelo je najosjetljivije na frekvencije u području između 4 i 8 Hz jer veliki broj dijelova tijela ima rezonantnu frekvenciju u tom području, npr. rezonantna frekvencija želudca je između 3 i 6 Hz, a rezonancija ruku je na ~5 Hz, te je poželjno imati najveće prigušenje vertikalnih vibracija u tom području frekvencija. Za harmoničke pobude ISO2631 propisuje način izračunavanja faktora percepcije udobnosti vožnje u ovisnosti o frekvenciji pobude i standardnoj devijaciji ubrzanja ovještene mase, koji se može prikazati u obliku frekvencijske karakteristike (vidi sliku 6). Osim frekvencije, ključno je i vrijeme izloženosti određenoj amplitudi i frekvenciji vertikalne vibracije [7, pog. 29].

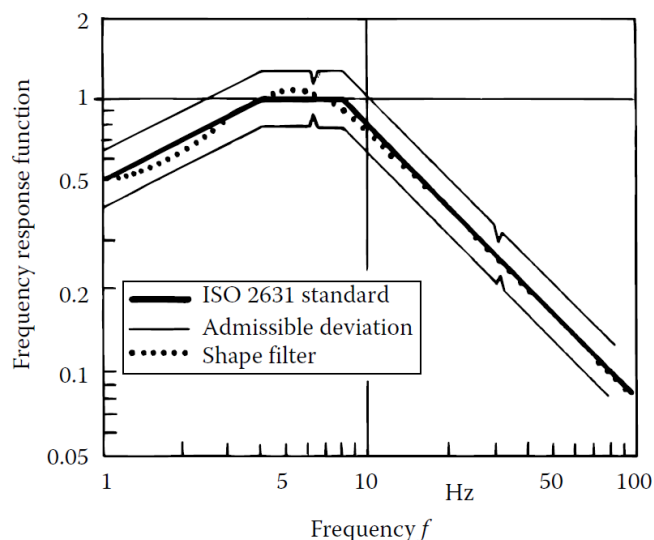
Odabir kriterija udobnosti ovisi o kontekstu uporabe, a u ovome je radu korištena standardna devijacija vertikalnog ubrzanja ovještene mase pošto se uklapa u kontekst linearnog kvadratičnog upravljanja, dovoljno je jednostavna, pruža dobar uvid u karakteristike ovjesa te je jedna od najčešće korištenih metrika za udobnost vožnje. Udobnost vožnje će biti veća što je standardna devijacija ubrzanja ovještene mase manja. Standardna devijacija vertikalnog ubrzanja ovještene mase u promatranom vremenskom intervalu t_{rms} izračunava se prema sljedećem izrazu:

$$a_{z,rms} = \sqrt{\frac{1}{t_{rms}} \int_0^{t_{rms}} \ddot{z}_s^2 dt} \quad (3.14)$$

Veza između standardne devijacije ubrzanja ovještene mase i funkcije cilja LQR može se primjetiti uspoređivanjem izraza (3.14) i izraza (3.1), gdje vidimo da je integral u izrazu (3.14)

u principu ekvivalent drugom članu integrala u izrazu (3.1) (vidi model (2.7)). U slučaju stohastičke pobude, standardna devijacija vertikalnog ubrzanja ovještene mase dobiva se uzimanjem drugog korijena odgovarajućeg elementa matrice kovarijanci izlaza \mathbf{Y} .

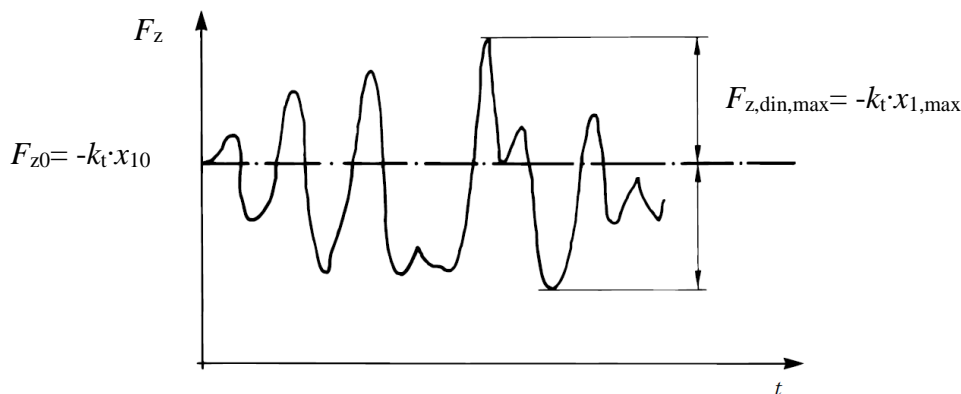
Ovisnost ljudskog tijela o frekvenciji pobude u ovome radu nije uključena u indeks performansi, već je dan osvrt na frekvencijske karakteristike ubrzanja ovještene mase (vidi 4.2.2) imajući na umu koji raspon frekvencija čovjek smatra neugodnim. Inače se ovisnost ljudskog tijela o frekvenciji pobude može uključiti u indeks performansi uvođenjem dodatnih varijabli stanja koje definiraju težinski filter (eng. *shape filter*) ubrzanja ovještene mase. Frekvencijska karakteristika težinskog filtera, prikazana na slici 6, odgovara osjetljivosti čovjeka, tako da najviše ističe ubrzanja ovještene mase u području frekvencija između 4 i 8 Hz, a izvan tih područja prigušuje ubrzanje ovještene mase čime ono gubi na značaju u indeksu performansi (za više detalja o težinskom filteru vidi [7, pog. 29]).



Slika 6. Ovisnost ljudskog tijela o frekvenciji pobude prema ISO 2631 standardu i frekvencijska karakteristika težinskog filtera drugog reda [7, pog. 29]

3.1.3.2. Upravlјivost

Bitan zadatak ovjesa, kako je bilo spomenuto u uvodu, jest osiguravanje neprekidnog kontakta između pneumatika i podloge kako bi upravljivost vozilom bila osigurana, a samim time i sigurnost vožnje. Iznos uzdužnih i lateralnih sila na mjestu dodira pneumatika i podloge izravno je povezan s iznosom normalne (vertikalne) sile. Stoga je bitno osigurati minimalan iznos vertikalne sile (vidi sliku 7) i izbjegavati slučaj gdje dolazi do odvajanja kotača od podloge u kojem je iznos normalne sile jednak nula.



Slika 7. Statička i dinamička normalna sila [7 pog. 29]

Uz pretpostavku da je vertikalna krutost pneumatika konstantna, slijedi da je normalna sila proporcionalna deformaciji pneumatika pa mjeru (ne)upravljivosti možemo definirati pomoću deformacije pneumatika, koja je uz to i varijabla stanja (vidi potpoglavljje 2.1). Promjene normalne sile, tj. deformaciju pneumatika nastojimo minimizirati pošto je pokazano [7, pog. 31] da postoji konveksna veza između uzdužnih i lateralnih sila i normalne sile, a posljedica te veze je smanjenje srednje vrijednosti uzdužnih i lateralnih sila tim više što su varijacije normalne sile veće. Kritični slučaj, tj. slučaj kada dolazi do odvajanja kotača od podloge je onaj u kojem je deformacija pneumatika veća od nule (težina vozila uzrokuje negativnu deformaciju pneumatika u ravnotežnom stanju, vidi potpoglavljje 2.2 i vidi sliku 7) te se takav slučaj treba izbjegavati.

Slično kao i kod udobnosti, najjednostavnija a dovoljno dobra mjera (ne)upravljivosti je standardna devijacija deformacije pneumatika u promatranom vremeskom intervalu koja se izračunava se prema:

$$x_{1,rms} = \sqrt{\frac{1}{t_{rms}} \int_0^{t_{rms}} x_1^2 dt} \quad (3.15)$$

Upravljivost je veća što je standardna devijacija deformacije pneumatika manja.

3.1.3.3. Hod ovjesa

Iako u suštini konstrukcijsko ograničenje hoda ovjesa predstavlja "tvrdo" ograničenje koje bi se moralo zadovoljiti, nemoguće je predvidjeti sve neravnine podloge u životnom vijeku vozila i uvesti to tvrdo ograničenje u izvod optimalnog linearnog kvadratičnog regulatora [3]. Stoga je pogodnije tvrdo ograničenje hoda ovjesa preformulirati u "meko" ograničenje u obliku standardne devijacije hoda ovjesa.

Standardna devijacija hoda ovjesa, koju nastojimo minimizirati, definirana je u promatranom vremenskom intervalu t_{rms} sljedećim izrazom:

$$x_{3,rms} = \sqrt{\frac{1}{t_{\text{rms}}} \int_0^{t_{\text{rms}}} x_3^2 dt} \quad (3.16)$$

3.1.4. Digitalni linearni kvadratični regulator

Kako kontinuirane regulatore nije moguće implementirati u stvarnosti jer su mikrokontroleri diskretni upravljački sustavi, prije implementacije upravljačkog zakona potrebno je izračunati pojačanja koja u obzir uzimaju uzorkovanje mjerenih signala i ekstrapolaciju upravljačkih signala. Pojačanja pogodna za izravnu implementaciju dobivaju se sintezom diskretnog linearnog kvadratičnog regulatora. U nastavku su prikazani osnovni izrazi potrebni za sintezu diskretnog linearnog kvadratičnog regulatora.

Diskretni linearni vremenski invarijantni sustav u prostoru stanja dan je izrazom:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k) \quad (3.17)$$

gdje k označava k -ti uzorak u (diskretnom) vremenu, \mathbf{x} je vektor stanja, a \mathbf{u} je upravljački vektor.

Linearna kvadratična funkcija cilja J dana je sljedećim izrazom:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{x}(k)^T \mathbf{Q}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k)^T \mathbf{R}_d \mathbf{u}(k) + 2\mathbf{x}(k)^T \mathbf{N}_d \mathbf{u}(k)) \quad (3.18)$$

gdje je \mathbf{Q}_d je pozitivna semidefinitna simetrična težinska matrica koja penalizira varijable stanja, \mathbf{R}_d je pozitivna definitna simetrična težinska matrica koja penalizira upravljačke varijable i \mathbf{N}_d je matrica koja veže varijable stanja i upravljačke varijable.

Optimalni vektor upravljanja $\mathbf{u}(k)$ koji minimizira funkciju cilja (3.18) ima oblik [29]:

$$\mathbf{u}(k) = -(\mathbf{R}_d + \mathbf{B}_d^T \mathbf{P}_d \mathbf{B}_d)^{-1} (\mathbf{B}_d^T \mathbf{P}_d \mathbf{A}_d + \mathbf{N}_d^T) \mathbf{x}(k) = -\mathbf{K}_d \mathbf{x}(k) \quad (3.19)$$

gdje je \mathbf{P}_d rješenje diskretne Riccatijeve algebarske jednadžbe (DARE):

$$\mathbf{P}_d = \mathbf{Q}_d + \mathbf{A}_d^T \mathbf{P}_d \mathbf{A}_d - (\mathbf{A}_d^T \mathbf{P}_d \mathbf{B}_d + \mathbf{N}_d) (\mathbf{R}_d + \mathbf{B}_d^T \mathbf{P}_d \mathbf{B}_d)^{-1} (\mathbf{B}_d^T \mathbf{P}_d \mathbf{A}_d + \mathbf{N}_d^T) \quad (3.20)$$

Jedinstveno rješenje jednadžbe (3.20) postoji samo ako je sustav upravljiv.

3.1.4.1. Veza između kontinuirane i diskretne domene i ekvivalentni indeks performansi digitalnog LQ regulatora

Često se sinteza LQR-a radi jednostavnosti provodi u kontinuiranom vremenu, gdje se odrede kontinuirane težinske matrice \mathbf{Q}_c i \mathbf{R}_c kojima se dobiva zadovoljavajuće ponašanje sustava. Ako

želimo dobiti iste performanse sustava primjenom diskretnog regulatora potrebno je prilagoditi težinske matrice te sintezu regulatora provesti na diskretnom sustavu. Prvo je potrebno pretvoriti kontinuirani prostor stanja u diskretni prostor stanja. Pritom se pretpostavlja diskretizacija primjenom impulsnog formatora nultog reda (eng. *Zero order hold*). Izrazi koji povezuju diskretni prostor stanja s kontinuiranim prostorom stanja su [29]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d &= e^{\mathbf{A}_c T_s} \\ \mathbf{B}_d &= \int_0^{T_s} e^{\mathbf{A}_c s} \mathbf{B}_c ds \\ \mathbf{C}_d &= \mathbf{C}_c \\ \mathbf{D}_d &= \mathbf{D}_c \end{aligned} \quad (3.21)$$

gdje je T_s vrijeme uzorkovanja, a $\exp(\mathbf{A}_c)$ je matični eksponencijal matrice \mathbf{A}_c .

Diskretizacijom kontinuirane funkcije cilja dobiva se veza između kontinuirane i diskretne funkcije cilja, a samim time i veza između težinskih matrica [30, pog. 9]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_d & \mathbf{N}_d \\ \mathbf{N}_d^T & \mathbf{R}_d \end{bmatrix} = \int_0^{T_s} \begin{bmatrix} \Phi^T(\tau) & \mathbf{0} \\ \Gamma^T(\tau) & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_c & \mathbf{N}_c \\ \mathbf{N}_c^T & \mathbf{R}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(\tau) & \Gamma(\tau) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} d\tau \quad (3.22)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) &= e^{\mathbf{A}_c \tau} \\ \Gamma(\tau) &= \int_0^\tau e^{\mathbf{A}_c \eta} \mathbf{B}_c d\eta \end{aligned} \quad (3.23)$$

Izraz (3.22) moguće je izračunati primjenom matičnog eksponencijala:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \mathbf{0} & \Phi_{22} \end{bmatrix} = \exp \left(\begin{bmatrix} -\mathbf{A}_c^T & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_c & \mathbf{N}_c \\ -\mathbf{B}_c^T & \mathbf{0} & \mathbf{N}_c^T & \mathbf{R}_c \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} T_s \right) \quad (3.24)$$

što konačno rezultira ekvivalentnim težinskim matricama:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_d & \mathbf{N}_d \\ \mathbf{N}_d^T & \mathbf{R}_d \end{bmatrix} = \Phi_{22}^T \Phi_{12} \quad (3.25)$$

Konačno težinske matrice dobivene izrazom (3.25) te diskretni prostor stanja dobiven izrazom (3.21) možemo upotrijebiti za dobivanje optimalnih pojačanja diskretnog LQR-a, rješavanjem jednadžbe (3.20) i uvrštavanjem rješenja DARE u izraz za izračunavanje pojačanja (3.19). Rutine za izračunavanje ekvivalentnih težinskih matrica postoje u programskim paketima, npr. u MATLAB-u naredbom *lqrd* izravno dobivamo pojačanja diskretnog regulatora za zadani kontinuirani prostor stanja, kontinuirane težinske matrice i vrijeme uzorkovanja a naredba u pozadini koristi opisani postupak za prilagođavanje težinskih matrica i izračunavanje pojačanja.

3.2. Optimalno upravljanje modelom s jednim stupnjem slobode gibanja

Kako bi se dobili inicijalni uvidi u moguća poboljšanja udobnosti vožnje primjenom aktivnog ovjesa, korisno je krenuti od jednostavnijih modela prema kompleksnijim modelima. Najjednostavniji model predstavljen u poglavlju 2 je model s jednim stupnjem slobode gibanja (1DoF) koji sadrži samo ovješenu masu. Matematički model koji se koristi u izvodu zakona optimalnog upravljanja dan je izrazom (2.3). Zadatak optimalnog upravljanja sastoji se od pronalaženja optimalnog vektora upravljanja u koji minimizira sljedeću funkciju cilja [6]:

$$\min [PI = E(x_1^2 + ru^2)] \quad (3.26)$$

gdje $E(x_1^2)$ predstavlja indeks performanse deformacije ovjesa, tj. penalizaciju hoda ovjesa pošto je isti ograničen (vidi potpoglavlje 3.1.3), $E(u^2)$ predstavlja indeks performanse udobnosti tj. penalizaciju ubrzanja ovještene mase a ujedno i upravljačke sile (vidi jedn. (2.1)), a r je težinski koeficijent koji određuje u kojoj se mjeri penalizira ubrzanje ovještene mase. Ova dva kriterija su suprotstavljena jer za postizanje veće udobnosti (manji u) hod ovjesa treba biti veći i obrnuto. Stoga koristimo težinski koeficijent r kako bi odredili zadovoljavajući kompromis na način da povećanjem iznosa r više penaliziramo ubrzanje ovještene mase što rezultira njenim smanjenjem tj. udobnijom vožnjom ali većim hodom ovjesa, i obrnuto.

Možemo primjetiti da izraz (3.26) predstavlja stohastički linearni kvadratni problem pa funkciju cilja (3.26) možemo zapisati u matičnom obliku (3.7), što rezultira težinskom matricom \mathbf{Q} i \mathbf{R} (skalar u ovom slučaju):

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = r, \quad (3.27)$$

Matrica \mathbf{N} jednaka je nul-matrici pošto u funkciji cilja (3.26) nema penalizacije umnoška varijabli stanja i upravljačkih varijabli.

Optimalni vektor upravljanja za dani problem je optimalni regulator po varijablama stanja (vidi odjeljak 3.1.1) sa matricom pojačanja \mathbf{K} koja je jednaka matrici pojačanja za deterministički LQ problem te je dana izrazom (3.2). Matricu pojačanja moguće je jednostavno izvesti analitički jer je sustav niskog (drugog) reda [6; 7, pog. 31].

Prema postupku opisanom u odjeljku 3.1.1, za dobivanje matrice pojačanja potrebno je riješiti algebarsku Riccatijevu jednadžbu (3.3). Matricu \mathbf{P} odabiremo kao simetričnu matricu:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Matrice \mathbf{A} i \mathbf{B} dane su izrazom (2.3) a matrice \mathbf{Q} i \mathbf{R} izrazom (3.23).

Uvrštavanjem poznatih matrica u izraz (3.3) dobivamo:

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.29)$$

Nakon množenja matrica i zbrajanja dobivamo konačnu matricu koja predstavlja sustav s tri jednadžbe i tri nepoznanice:

$$\begin{bmatrix} P_2^2 r^{-1} - 1 & P_2 P_3 r^{-1} - P_1 \\ P_2 P_3 r^{-1} - P_1 & P_3^2 r^{-1} - 2P_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.30)$$

Rješavanjem jednadžbi (3.30) dobivamo P_1 , P_2 i P_3 izražene preko poznatog r :

$$P_1 = \sqrt{2}r^{1/4}, P_2 = \sqrt{r}, P_3 = \sqrt{2}r^{3/4} \quad (3.31)$$

što uvrštavanjem u (3.2) rezultira matricom pojačanja \mathbf{K} :

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_2 r^{-1} & P_3 r^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r}} & \frac{\sqrt{2}}{r^{1/4}} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Konačno, optimalni zakon upravljanja u glasi:

$$u_{LQ} = -\frac{1}{\sqrt{r}}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{r^{1/4}}x_2 \quad (3.34)$$

Optimalni zakon upravljanja za 1DoF model sastoji se od opruge krutosti $r^{-1/2}$ koja je smještena između ovještene mase i podloge i amortizera s koeficijentom prigušenja $\sqrt{2}r^{-1/4}$ smještenog između ovještene mase i "neba" tzv. *Skyhook* amortizer [6, 7 pog. 31]. Takvu strukturu nije moguće izvesti korištenjem pasivnih komponenti koje sve moraju biti smještene između ovještene mase i tla iz čega slijedi da je optimalni ovjes nužno aktivni ovjes.

Koeficijent relativnog prigušenja (eng. *damping ratio*) određuje se iz polova zatvorenog sustava, koje dobivamo rješavanjem dobro poznate karakteristične jednadžbe:

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{cl}| = 0 \quad (3.35)$$

gdje je $\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$ matrica sustava zatvorenog regulacijskog kruga, a \mathbf{I} je jedinična matrica. Uvrštavanjem (3.33) i (2.3) u (3.35) dobivamo karakterističnu jednadžbu zatvorenog regulacijskog kruga:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc} s & 0 \\ 0 & s \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{r}} & -\frac{\sqrt{2}}{r^{1/4}} \end{array} \right] = 0 \\ & \left[\begin{array}{cc} s & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{r}} & s + \frac{\sqrt{2}}{r^{1/4}} \end{array} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} & s \left(s + \frac{\sqrt{2}}{r^{1/4}} \right) + \frac{1}{\sqrt{r}} = 0 \\ & s^2 + s\sqrt{2}r^{-1/4} + r^{-1/2} = 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Rješavanjem jednadžbe (3.37) dobivamo polove zatvorenog regulacijskog kruga:

$$s_{1,2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} r^{-1/4} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} r^{-1/4} i = \sigma \pm \omega_p i \quad (3.38)$$

Stupanj prigušenja ζ računa se prema sljedećem izrazu te ujedno iznosi:

$$\zeta = \frac{\sigma}{\omega_n} = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega_p^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3.39)$$

Iz (3.39) slijedi da stupanj prigušenja ne ovisi o težinskom koeficijentu r te odgovara dobro prigušenom (kvazi-aperiodskom) odzivu na odskočnu funkciju i puno je veći od stupnja prigušenja pasivnog ovjesa, čiji je iznos između 0,2 i 0,3 kod putničkih vozila[6; 7, pog.31] Međutim, iz izraza (3.39) slijedi da prirodna frekvencija ovješene mase ω_n ovisi o r :

$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega_p^2} = r^{-1/4} \quad (3.40)$$

i u rasponu je od 0,0316 rad/s (0,005 Hz) za $r=10^6$ do 31,6 rad/s (5,3 Hz) za $r = 10^{-6}$.

Uključivanjem trzaja u model i funkciju cilja, problem optimalnog upravljanja postaje jednak [6; 7, pog. 31]:

$$\min \left[PI = E(x_1^2 + r_1 x_3^2 + r_2 u_1^2) \right] \quad (3.41)$$

gdje je r_1 težinski koeficijent koji penalizira ubrzanje ovješene mase, a r_2 je težinski koeficijent koji penalizira trzaj ovješene mase. Ukoliko je r_2 jednak nuli, funkcija cilja (3.41) postaje jednaka funkciji cilja (3.26). Ograničenja su dana modelom (2.4).

Zapisivanjem funkcije cilja (3.41) u matičnom obliku dobivaju se matrice **Q** i **R**:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_1 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = r_2, \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Matricu **P** opet izabiremo kao simetričnu matricu:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 & P_4 & P_5 \\ P_4 & P_2 & P_6 \\ P_5 & P_6 & P_3 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Uvrštavanjem (3.42), (3.43) i (2.4) u (3.3) dobiva se nakon nekoliko koraka:

$$\begin{bmatrix} P_5^2 r_2^{-1} - 1 & P_5 P_6 r_2^{-1} - P_1 & P_5 P_3 r_2^{-1} - P_4 \\ P_5 P_6 r_2^{-1} - P_1 & P_6^2 r_2^{-1} - 2P_4 & P_6 P_3 r_2^{-1} - P_2 - P_5 \\ P_5 P_3 r_2^{-1} - P_4 & P_6 P_3 r_2^{-1} - P_2 - P_5 & P_3^2 r_2^{-1} - 2P_6 - r_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.44)$$

što rezultira sa setom nelinearnih algebarskih jednažbi. Ukoliko se ograničimo na dobivanje elemenata matrice **P** koji su potrebni za izračunavanje pojačanja regulatora, potrebno je riješiti jednažbe koje rezultiraju s P_3 , P_5 i P_6 pošto se oni pojavljuju u matrici **K**:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} r_2^{-1} P_5 & r_2^{-1} P_6 & r_2^{-1} P_3 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Reducirani set jednažbi potreban za izračunavanje izraza (3.45) je:

$$P_5 = r_2^{1/2}, P_6^2 = 2r_2^{1/2} P_3, P_3^2 = r_1 r_2 + 2r_2 P_6 \quad (3.46)$$

Analitičko rješavanje izraza (3.46) je komplicirano uz $r_1, r_2 > 0$, pa je u nastavku prikazano eksplicitno rješenje jednažbe (3.46) uz $r_1 = 0$ što odgovara slučaju gdje penaliziramo samo trzaj. Uvrštavanjem $r_1 = 0$ u (3.46) dobivamo:

$$P_5 = r_2^{1/2}, P_6 = 2r_2^{2/3}, P_3 = 2r_2^{5/6} \quad (3.47)$$

što uvrštavanjem u (3.45) rezultira pojačanjima:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} r_2^{-1/2} & 2r_2^{-1/3} & 2r_2^{-1/6} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Uvrštavanje (3.48) u (3.2) dobivamo optimalni zakon upravljanja [6; 7, pog. 31]:

$$u_{1,LQ} = -r_2^{-1/2} x_1 - 2r_2^{-1/3} x_2 - 2r_2^{-1/6} x_3 \quad (3.49)$$

dok je originalna upravljačka varijabla, normirana sila u , jednaka integralu izraza (3.49):

$$u_{LQ} = \int u_{1,LQ} dt = -r_2^{-1/2} \int x_1 dt - 2r_2^{-1/3} \int x_2 dt - 2r_2^{-1/6} x_2 \quad (3.50)$$

Iz optimalne upravljačke sile (3.50) može se zaključiti da integriranjem hoda ovjesa x_1 (prvi integral na desnoj strani) ovaj regulator osigurava da hod ovjesa uvijek dolazi u središnji položaj, tj. dobivamo tzv. *self-leveling* [6; 7 pog. 31; 31]. Drugi član predstavlja integral brzine

ovješene mase, koji je zapravo položaj ovješene mase, pa taj cijeli član predstavlja *Skyhook* oprugu s koeficijentom krutosti $2r_2^{-1/3}$, dok je zadnji član opet *Skyhook* amortizer s koeficijentom prigušenja $2r_2^{-1/6}$. Slično kao i za upravljački zakon (3.34) možemo zaključiti da ovakav optimalni ovjes nije ostvariv pomoću pasivnih elemenata smještenih između ovješene mase i podloge te da je samim time optimalni ovjes nužno aktivni ovjes.

3.2.1. Analiza kovarijanci modela s jednim stupnjem slobode gibanja

U potpoglavlju 3.1.2 definiran je postupak analize kovarijanci za općeniti sustav te je pokazano kako je moguće dobiti standardne devijacije tj. RMS vrijednosti vektora izlaza i vektora stanja. Za dobivanje indeksa performansi aktivnog ovjesa, matricu \mathbf{F} u izrazu (3.10) zamjenjujemo s matricom sustava zatvorenog regulacijskog kruga:

$$\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{A} - \mathbf{BK} \quad (3.51)$$

a matrica \mathbf{Q}_w , pošto se radi o jednom ulazu u model (brzina podloge w), je skalar jednak $2\pi AV$, [6] gdje je faktor 2π povezan s definicijom Fourierove transformacije koja se koristi za dobivanje spektralne gustoće snage brzine podloge, AV , te se može promijeniti ukoliko se mijenja način izračunavanja spektralne gustoće snage profila.

Jednadžba varijanci (3.10) uz (3.51) za zatvoreni regulacijski krug aktivnog ovjesa glasi:

$$\mathbf{A}_{cl}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_{cl}^T + 2\pi AV\mathbf{G}\mathbf{G}^T = \mathbf{0} \quad (3.52)$$

Ukoliko u jednadžbi (3.52) izostavimo $2\pi AV$, elementi matrice kovarijanci \mathbf{X} će biti normirani s $2\pi AV$ tj. odgovarajući indeksi performansi (rms vrijednosti) će biti normirani s $\sqrt{2\pi AV}$ [3, 6, 17]. Normiranjem rezultata isključujemo utjecaj brzine vozila i hrapavosti ceste iz usporedbe raznih podešenja ovjesa i dobivamo općenite rezultate iz kojih slijedi da će stvarne standardne devijacije biti veće ukoliko se brzina vozila V poveća ili ukoliko se vozi grubljom cestom (A povećan). Drugi način normiranja indeksa performansi je da drugi korijen matrice kovarijanci naknadno podijelimo s $\sqrt{2\pi AV}$. Normirane vrijednosti označavaju se sa tildom, pa je tako primjerice normirani RMS hoda ovjesa $\tilde{x}_1 = x_{1,rms}/\sqrt{2\pi AV}$.

Za sustav niskog reda, ovdje drugog, moguće je jednostavno analitički riješiti jednadžbu varijanci [6, 31]. Uvrštavanjem matrice sustava zatvorenog regulacijskog kruga koja je dana u (3.36) i vektor \mathbf{G} iz (2.3) u (3.52) dobiva se:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{r}} & -\frac{\sqrt{2}}{r^{1/4}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{cl}} \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 & X_3 \\ X_3 & X_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} + \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 & X_3 \\ X_3 & X_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{r}} \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{r^{1/4}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{cl}^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{-\mathbf{G}\mathbf{G}^T} \quad (3.53)$$

gdje je matrica \mathbf{X} simetrična jer predstavlja matricu kovarijanci. Nakon nekoliko koraka operacija s matricama izraz (3.53) glasi:

$$\begin{bmatrix} 2X_3 & X_2 - \frac{1}{\sqrt{r}}X_1 - \frac{\sqrt{2}}{r^{1/4}}X_3 \\ X_2 - \frac{1}{\sqrt{r}}X_1 - \frac{\sqrt{2}}{r^{1/4}}X_3 & -2\frac{1}{\sqrt{r}}X_3 - 2\frac{\sqrt{2}}{r^{1/4}}X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

što nakon rješavanja daje X_1 , X_2 i X_3 u funkciji težinskog koeficijenta r :

$$X_1 = \frac{3}{2\sqrt{2}}r^{1/4}, X_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}r^{-1/4}, X_3 = -\frac{1}{2} \quad (3.55)$$

X_1 je normirana varijanca hoda ovjesa, a X_2 je normirana varijanca brzine ovještene mase.

Varijancu ubrzanja ovještene mase, koja nije sadržana u matrici kovarijanci stanja, možemo dobiti definiranjem vektora izlaza:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} u \quad (3.56)$$

dok je matrica izlaza zatvorenog regulacijskog kruga dana izrazom:

$$\mathbf{C}_{cl} = \mathbf{C} - \mathbf{D}\mathbf{K} \quad (3.57)$$

Uvrštavanjem (3.56) u (3.57), a zatim (3.57) u (3.13) dobivamo normiranu varijancu ubrzanja ovještene mase:

$$Y_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}r^{-3/4} = \frac{27}{64}X_1^{-3} \quad (3.58)$$

Drugi korijen izraza (3.58) daje izraz za normiranu standardnu devijaciju ubrzanja ovještene mase \tilde{x}_2 u ovisnosti o normaliziranoj standardnoj devijaciji hoda ovjesa:

$$\tilde{x}_2 = \frac{3\sqrt{3}}{8}\tilde{x}_1^{-3} \quad (3.59)$$

Izraz (3.59) predstavlja analitičko rješenje jednadžbe (3.10). Možemo primjetiti da smanjivanjem normiranog hoda ovjesa normirano ubrzanje ovještene mase raste.

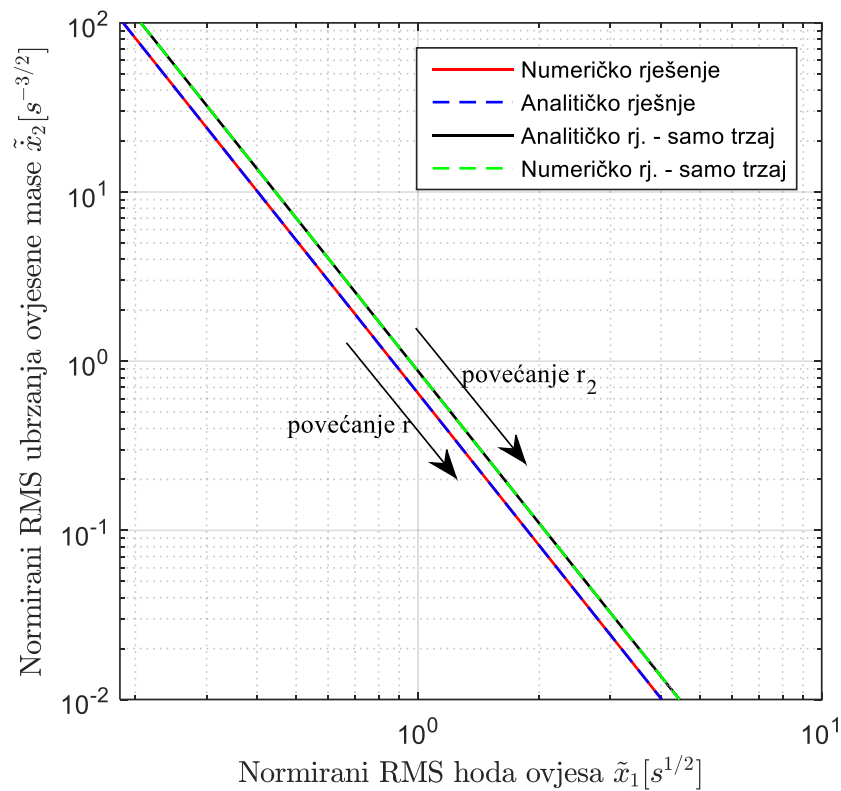
Ukoliko u funkciju cilja uvrstimo i trzaj (vidi izraz (3.41)), te ponovimo gore opisani postupak za specijalni slučaj gdje penaliziramo samo trzaj ($r_1 = 0$), dobivamo analitičko rješenje [31]:

$$\tilde{x}_3 = \frac{5}{9} \sqrt{\frac{5}{2}} \tilde{x}_1^{-3} \quad (3.60)$$

gdje je \tilde{x}_3 normirano ubrzanje ovješene mase, a \tilde{x}_1 normirani hod ovjesa. Ovdje također vrijedi da smanjivanjem hoda ovjesa ubrzanje ovješene mase raste.

Osim analitičkih rješenja za navedena dva, vrlo jednostavna slučaja dobivena su i numerička rješenja u programskom paketu MATLAB. Numerička su rješenja dobivena primjenom numeričkog alata izrađenog na temelju izraza (3.1)-(3.8) kojima se dobivaju pojačanja linearnog kvadratičnog regulatora te izraza (3.51) i (3.52) za provođenje analize kovarijanci. Pritom je potrebno definirati matrice prostora stanja koje ovise o modelu vozila (vidi npr. (2.3)) i težinske matrice funkcije cilja (vidi npr. (3.27)). Pojačanja linearnog kvadratičnog regulatora dobivaju se u MATLAB-u primjenom naredbe *lqr*, dok se jednadžba kovarijanci (3.52) rješava naredbom *lyap*. Slika 8 prikazuje usporedbu analitičkih i numeričkih rješenja problema optimalnog upravljanja ovjesom s jednim stupnjem slobode gibanja. Numerička rješenja (puna crvena i crtkana zelena linija) daju identične rezultate kao i analitička rješenja (crtkana plava i puna crna linija). Stoga, razvijena procedura za dobivanje numeričkih rješenja u MATLAB-u može se koristiti za dobivanje performansi regulatora kompliciranijih modela (npr. model s dva stupnja slobode gibanja) i podešenja (npr. za r_1 i r_2 veće od 0). Jedini je uvjet da se model zapiše u obliku prostora stanja i da se ciljna funkcija može zapisati u obliku LQ problema.

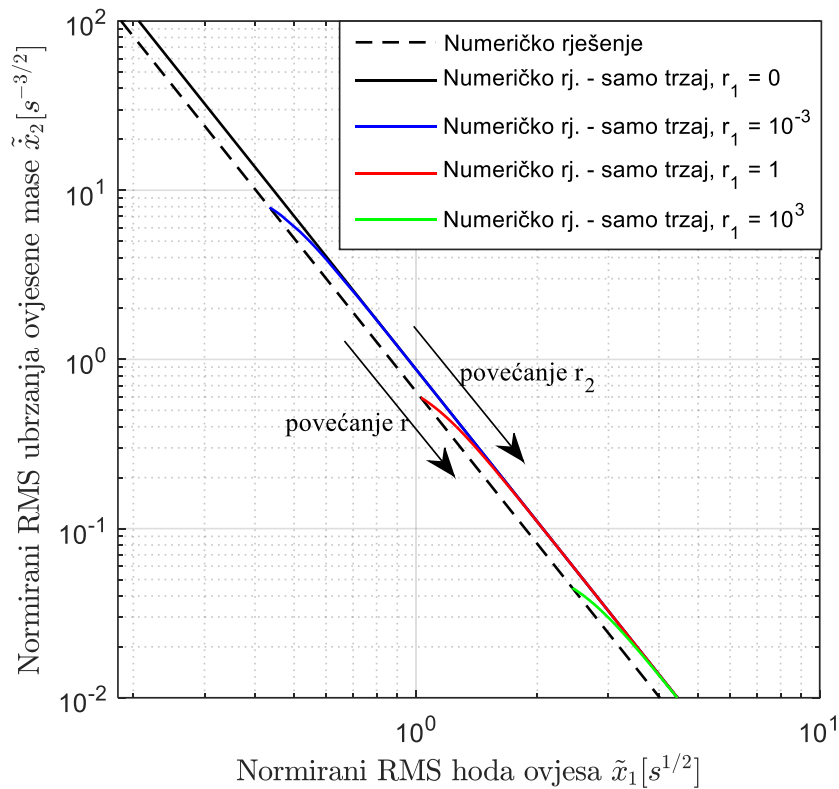
Iz rezultata prikazanih na slici 8 slijedi da za isti hod ovjesa, penalizacijom samo trzaja (izraz (3.41)) dobivamo 35,4% veće ubrzanje ovješene mase nego u početnom slučaju (izraz (3.26)), ali je trzaj značajno smanjen (vidi sliku 10) [6; 7, pog. 31]. Također, povećavanjem težinskog koeficijenta r u slučaju funkcije cilja (3.26) ili r_2 u slučaju funkcije cilja (3.41) ubrzanje ovješene mase pada a hod ovjesa raste, kao što je i očekivano.



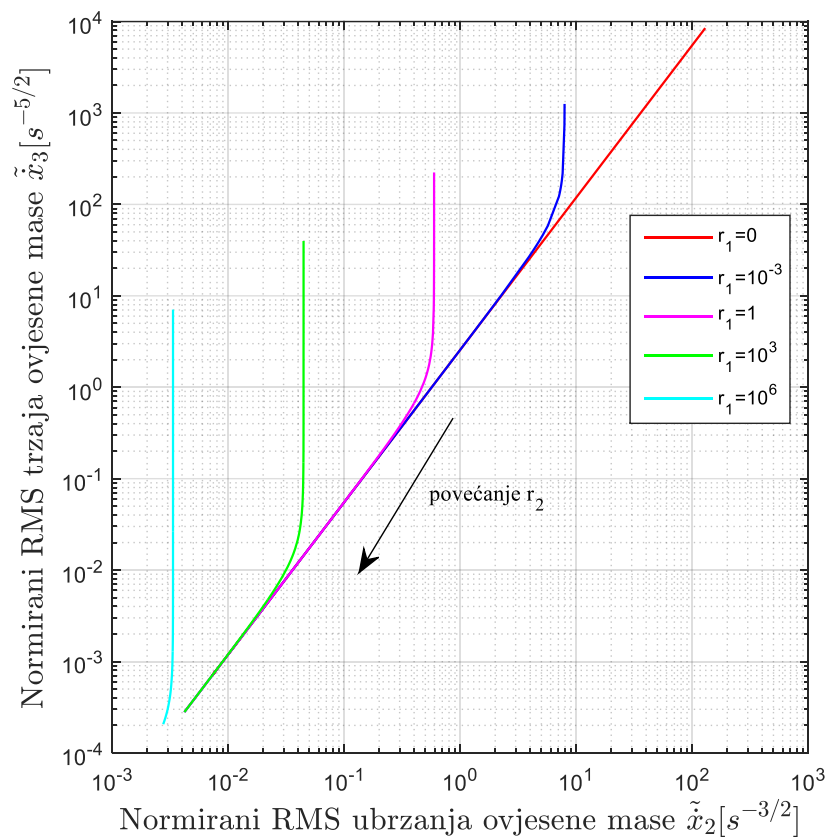
Slika 8. Usporedba numeričkih i analitičkih rješenja za model sa jednim stupnjem slobode gibanja i funkcije cilja (3.26) i (3.41) uz $r_1 = 0$ [6; 7, pog.31]

Slika 9 prikazuje rezultate za nekoliko različitih podešenja težinskog koeficijenta r_1 uz promjenjivi r_2 . Sve krivulje optimalnih performansi smještene su između dva ekstremna slučaja – osnovni slučaj gdje je $r_2 = 0$ i slučaj gdje je penaliziram samo trzaj $r_1 = 0$.

Iz rezultata prikazanih na slici 10 možemo zaključiti da povećanjem odnosa r_1/r_2 ubrzanje ovješene mase pada ali trzaj raste (za iznimno veliki iznos omjera r_1/r_2 trzaj može težiti u beskonačnost [6, 31]).



Slika 9. Usporedba normiranih rms vrijednosti za različite konstantne iznose penalizacije r_1 i mijenjani r_2 u izrazu (3.41)



Slika 10. Usporedba trzaja i ubrzanja ovjesene mase za različite iznose težinskih koeficijenata u (3.41)

3.2.2. Simulacijska provjera rezultata dobivenih analizom kovarijanci

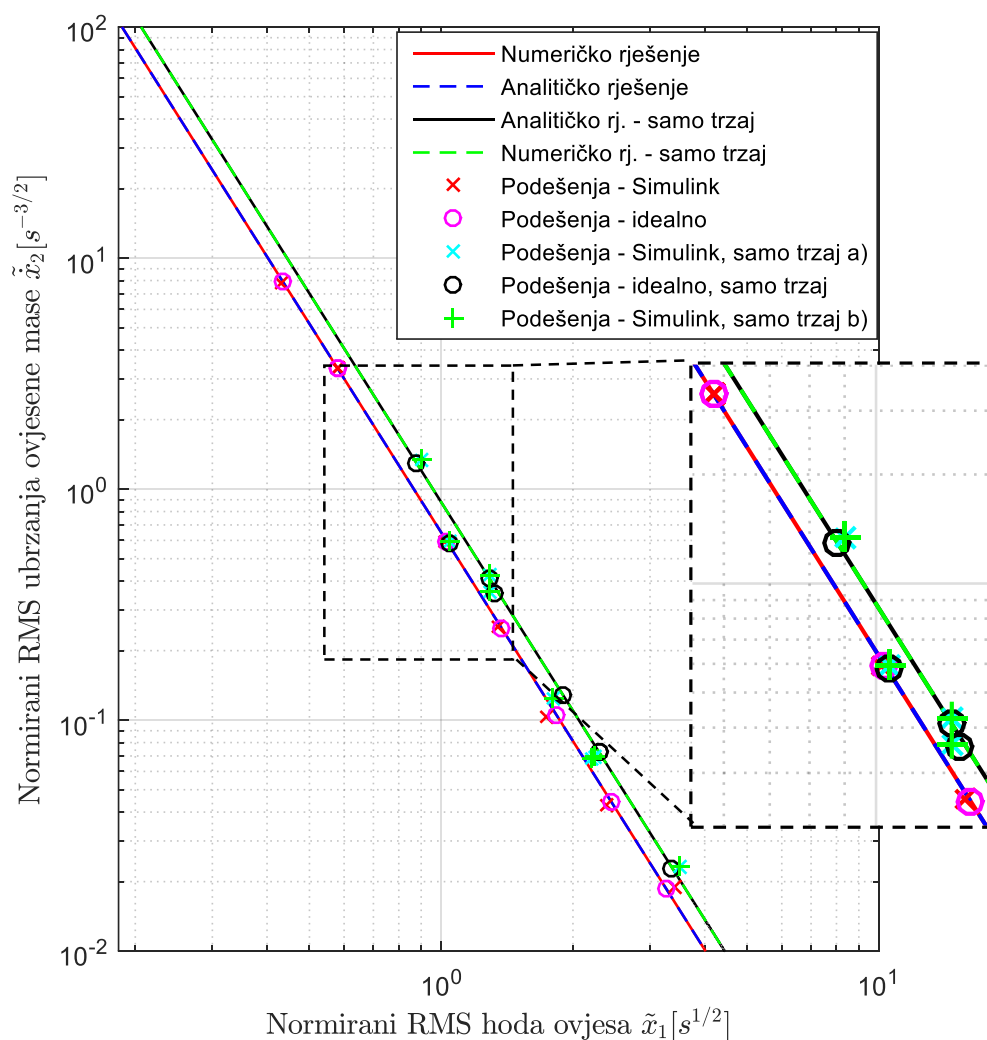
Numerički alati izrađeni za dobivanje performansi aktivnog ovjesa analizom kovarijanci primjenjivi su isključivo na modele zapisane u obliku prostora stanja jer za rješavanje jednadžbe varijanci (3.52) moramo poznavati matricu sustava zatvorenog regulacijskog kruga \mathbf{A}_{cl} . U slučaju da je model ovjesa vozila nelinearan (npr. polu-aktivni ovjes, nelinearne karakteristike opruga ili prigušivača), ili ako model sadrži druge nelinearnosti poput podmodela odbojnika i odvajanja kotača od podloge, normirane RMS vrijednosti indeksa performansi ne možemo dobiti primjenom postupka prikazanog u prethodnom odjeljku. U tom slučaju performanse je moguće dobiti isključivo simulacijom u npr. Simulink-u koja mora biti dovoljno precizna ali se mora i dovoljno brzo izvoditi.

Postupak dobivanja indeksa performansi sastoji se od pobuđivanja modela vozila bijelim šumom dobivenim u Simulink-u korištenjem nasumičnog izvora (eng. *Random Source*) i spremanja vremenskih odziva željenih izlaznih varijabli i ulazne varijable u model. Zatim slijedi izračunavanje standardnih devijacija izlaznih varijabli i izračunavanje spektralne gustoće snage brzine podloge. Spektralnu gustoću snage brzine podloge možemo dobiti korištenjem postupka opisanog u [32]. Dijeljenjem standardnih devijacija izlaznih varijabli sa drugim korijenom srednje vrijednosti izračunate spektralne gustoće snage dobivamo normirane rms vrijednosti izlaznih varijabli.

Za dobivanje vrlo preciznih rezultata, pobuda mora trajati dovoljno dugo da se pobude i najsporiji modovi sustava. Zadovoljavajuću preciznost uz što manje vrijeme izvođenja simulacije je moguće postići skaliranjem vremena trajanja simulacije proporcionalno najmanjoj prirodnoj frekvenciji (najvećoj vremenskoj konstanti) sustava tako da je trajanje simulacije primjerice 500 puta veće nego period oscilacije ovješene mase. Drugi utjecajni čimbenik je vremenski korak simulacije koji mora biti dovoljno kratak za postizanje preciznih rezultata ali ne prekratak kako se simulacija ne bi dodatno usporila. Odabran je fiksni vremenski korak u iznosu od 1 ms (frekvencija uzorkovanja od 1000 Hz) jer se skraćivanjem vremenskog koraka nisu dobili značajni pomaci u preciznosti, a izvođenje simulacije je zadovoljavajuće brzine.

Slika 11 prikazuje usporedbu simulacijskih rezultata za modele dane jednadžbama (2.3) i (2.4), s regulatorom za model (2.3) koji je definiran izrazom (3.34) i označen s crvenim križićem, za model (2.4) s idealnim regulatorom (samo trzaj a)) koji je definiran izrazom (3.49) i označen svijetlo-plavim križićima, i realnim regulatorom (samo trzaj b)) definiranim izrazom (3.50) i označenim zelenim plusevima. Idealna rješenja dana ljubičastim i crnim kružićima

predstavljaju rješenja dobivena numeričkim postupkom prikazanim u prethodnom odjeljku. Prvo, primjećujemo da u slučaju gdje koristimo penalizaciju trzaja, idealni (a) i realni (b) regulator daju iste rezultate. Također, simulacijski rezultati su vrlo blizu idealnih (teorijskih) rezultata dobivenih analizom kovarijanci, iako postoje mala odstupanja zbog konačnog vremena trajanja simulacije, konačnog vremenskog koraka simulacije i zbog toga što izvor bijelog šuma nije idealan. Na temelju dobivenih, vrlo preciznih, simulacijskih rezultata možemo zaključiti da je opisani postupak dobivanja normiranih rms vrijednosti izlaznih varijabli pomoću simulacijskih modela vrlo točan te da se može primjeniti u slučaju nelinearnih modela.

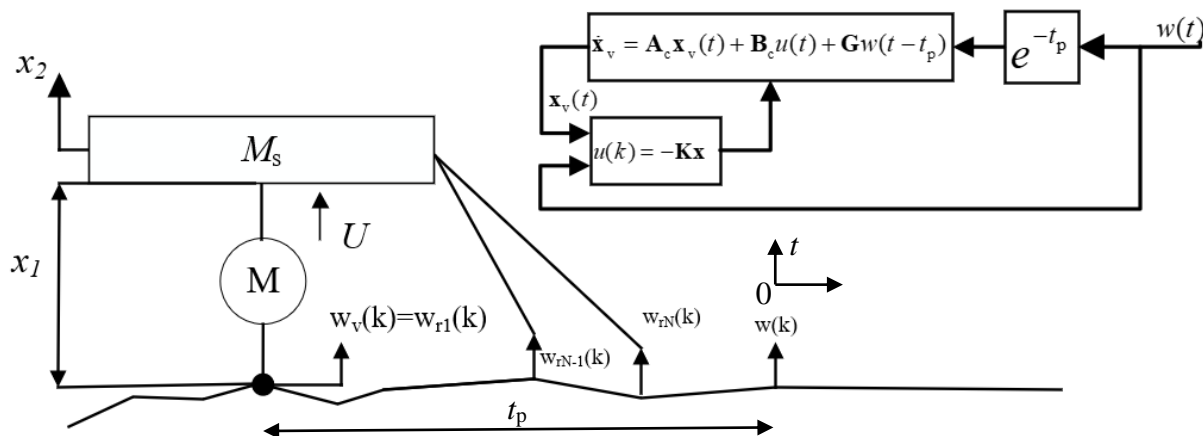


Slika 11. Usporedba numerički dobivenih (idealnih) rezultata i simulacijskih rezultata za model s jednim stupnjem slobode gibanja

3.2.3. Digitalna regulacija aktivnog ovjesa uz unaprijedno poznavanje profila ceste

Regulacija aktivnog ovjesa uz unaprijedno poznavanje profila ceste (eng. *Road Preview Control*) podrazumijeva da je osim varijabli stanja vozila poznat i profil ceste po kojoj će vozilo proći. Cesta se može snimati laserima, LiDAR-om ili stereo kamerama postavljenim na prednji dio vozila, a informacije dobivene snimanjem ceste po kojoj će vozilo proći mogu se iskoristiti kako bi se sustav bolje pripremio za poremećaj, kako bi se ublažili utjecaji dinamike aktuatora, mrtvih vremena u sustavu i za poboljšavanje performansi sustava. Prvo istraživanje upravljanja s unaprijednim poznavanjem profila ceste proveo je Bender [33]. Pomoću Wiener-Hopfovog pristupa u frekvencijskom je području dobio optimalne performanse za 1DoF model. Ovdje je unaprijedno regulacijsko djelovanje po budućem profilu ceste napravljeno po uzoru na [24], u diskretnom području s postavljanjem početnog trenutka ispred vozila na udaljenost unaprijednog poznavanja ceste. Time se sinteza regulatora bitno pojednostavljuje u odnosu na kontinuirane pristupe i na pristupe gdje se ishodište (početni trenutak) postavlja na lokaciju $\frac{1}{4}$ modela vozila [3].

Slika 12 prikazuje model vozila s jednim stupnjem slobode gibanja koji je proširen s unaprijednim poznavanjem ceste.



Slika 12. Model s jednim stupnjem slobode gibanja proširen unaprijednim poznavanjem ceste

Pomicanjem ishodišta vremena, tj. početnog trenutka, ispred vozila problem se sa stanovišta vozila pretvara u problem s mrtvim vremenom ulaza, koji je lakše riješiti u diskretnom vremenu nego u kontinuiranom vremenu. Model proširen s unaprijednim poznavanjem profila ceste razlikuje se u svojem kontinuiranom obliku od modela bez unaprijednog poznavanja profila ceste danog izrazom (2.3) jedino u formulaciji brzine podloge. Smještanjem trenutnog vremena t ispred vozila, brzina podloge koja je u tom trenutku ulaz u model vozila je zapravo jednaka

brzini podloge koja je na mjestu t_0 bila u trenutku $t-t_p$. Drugim riječima, brzina podloge koja je ulaz u model vozila je zakašnjela brzina podloge za duljinu vremena pregleda ceste $w_v(t) = w(t-t_p)$.

Model vozila u obliku diskretnog prostora stanja dobivamo diskretizacijom modela (2.3) pomoću izraza (3.21):

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_v^d \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \mathbf{B}_v^d u(k) + \mathbf{G}_v^d w_v(k) \quad (3.61)$$

gdje je $w_v(k) = w(t-t_p)$, a diskretni ekvivalent matrici \mathbf{G} je $\mathbf{G}_v^d = T_s[-1 \ 0]^T$.

Unaprijedna informacija o profilu ceste diskretizira se s N točaka:

$$N = t_p / T_s \quad (3.62)$$

gdje je t_p vrijeme unaprijednog poznavanja informacije o podlozi, a T_s vrijeme uzorkovanja.

Diskretizacijom ceste dobivamo N novih, mjerljivih varijabli stanja ceste \mathbf{x}_r :

$$\mathbf{x}_r = [x_{r1} \ \dots \ x_{rN}] = [w_{r1} \ \dots \ w_{rN}] \quad (3.63)$$

uz to, vrijedi da je $w_v(k) = x_{r1}(k)$.

Model ceste u obliku diskretnog prostora stanja tada je jednak:

$$\begin{bmatrix} x_{r1}(k+1) \\ x_{r2}(k+1) \\ \vdots \\ x_{rN}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{r1}(k) \\ x_{r2}(k) \\ \vdots \\ x_{rN}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} w_r(k) \quad (3.64)$$

gdje je $w_r(k)$ brzina podloge u k -tom trenutku vremena i predstavlja ulaz u model ceste. Općeniti matrični zapis izraza (3.64) je:

$$\mathbf{x}_r(k+1) = \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r(k) + \mathbf{G}_r w_r(k) \quad (3.65)$$

s matricama:

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N-1 \times 1} & \mathbf{I}_{N-1 \times N-1} \\ 0 & \mathbf{0}_{1 \times N-1} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

$$\mathbf{G}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N-1 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Spajanjem modela vozila i modela unaprijednog poznavanja profila ceste dobivamo prošireni model u kojem nema mrtvog vremena:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_v(k+1) \\ \mathbf{x}_r(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{2 \times 2} & \mathbf{A}_2^{2 \times N} \\ \mathbf{0}^{N \times 2} & \mathbf{A}_3^{N \times N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_v(k) \\ \mathbf{x}_r(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_v^{d \ 2 \times 1} \\ \mathbf{0}^{N \times 1} \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{2 \times 1} \\ \mathbf{G}_r \end{bmatrix} w_r(k) \quad (3.67)$$

gdje su matrice jednake:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1 &= \mathbf{A}_v^d \\ \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_v^{2 \times 1} & \mathbf{0}^{2 \times N-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_3 &= \mathbf{A}_r^{N \times N}\end{aligned}\quad (3.68)$$

Mrtvo vrijeme u proširenom modelu nije izravno vidljivo jer je uklopljeno kroz model unaprijednog poznavanja profila ceste ali posljedica ovog je da model (3.67) više nije upravljiv po varijablama stanja, što je jedan od uvjeta za primjenu linearnog kvadratičnog upravljanja. Gubitak upravljivosti je sasvim logičan. Naime, bilokakvo djelovanje aktuatora ovjesa ne može utjecati na profil ceste koji je ispred vozila.

Funkcija cilja optimalnog upravljanja jednaka je funkciji cilja za kontinuirani sustav i dana je izrazom (3.26). Korištenjem izraza (3.24) i (3.25) težinske matrice funkcije cilja kontinuiranog sustava, koje su dane izrazom (3.28), pretvaramo u ekvivalentne težinske matrice diskretnog sustava \mathbf{Q}_v^d , \mathbf{R}_v^d i \mathbf{N}_v^d . Težinske matrice proširenog sustava uključuju težinske matrice za vozilo, i jednake su:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_v^{d2 \times 2} & \mathbf{0}^{2 \times N} \\ \mathbf{0}^{N \times 2} & \mathbf{0}^{N \times N} \end{bmatrix} \\ \mathbf{R} &= \mathbf{R}_v^{d1 \times 1}\end{aligned}\quad (3.69)$$

Iako je prošireni sustav (3.67) neupravljiv po varijablama stanja, moguće je izvesti izraze za matrice pojačanja optimalnog regulatora po varijablama stanja [24], koji je tada dan sljedećim izrazom:

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} = -\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^{1 \times 2} & \mathbf{K}_2^{1 \times N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_r \end{bmatrix}\quad (3.70)$$

Matrica pojačanja \mathbf{K}_1 , koja množi varijable stanja vozila \mathbf{x}_v , jednaka je matrici pojačanja za slučaj bez unaprijednog poznavanja profila ceste, naravno za diskretni model vozila. Puni izvod matrica pojačanja \mathbf{K}_1 i \mathbf{K}_2 , u kojem je dokazana prethodna tvrdnja, dan je u prilogu A na kraju rada.

Matrica pojačanja \mathbf{K}_2 , koja množi varijable stanja ceste \mathbf{x}_r , može se izračunati pomoću matrice \mathbf{K}_1 i modela vozila:

$$\mathbf{K}_2 = \left(\mathbf{R}_{vd} + \mathbf{B}_{vd}^T \mathbf{P}_{11} \mathbf{B}_{vd} \right)^{-1} \mathbf{B}_{vd}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} \mathbf{G}_{vd} & \mathbf{A}_{clv}^T \mathbf{P}_{11} \mathbf{G}_{vd} & \cdots & \left(\mathbf{A}_{clv}^T \right)^{N-2} \mathbf{P}_{11} \mathbf{G}_{vd} & \left(\mathbf{A}_{cl}^T \right)^{N-1} \mathbf{P}_{11} \mathbf{G}_{vd} \end{bmatrix}\quad (3.71)$$

gdje je \mathbf{P}_{11} rješenje diskretne algebarske Riccatijeve jednadžbe za slučaj bez unaprijednog poznavanja ceste (isto se rješenje koristi za dobivanje pojačanja \mathbf{K}_1), a \mathbf{A}_{clv} je matrica sustava zatvorenog regulacijskog kruga za slučaj bez unaprijednog poznavanja ceste:

$$\mathbf{A}_{clv} = \mathbf{A}_{vd} - \mathbf{B}_{vd} \mathbf{K}_1 \quad (3.72)$$

Dakle, utjecaj unaprijednog poznavanja profila ceste na unaprijedno regulacijsko djelovanje ovisi o podešenju ovjesa te nije jednak za dva različita podešenja ovjesa (različite matrice \mathbf{Q} i \mathbf{R}). Također, prikazani postupak za dobivanje regulatora s unaprijednim djelovanjem po varijablama stanja ceste može se izravno primjeniti na modelu s 2 stupnja slobode gibanja zamjenom odgovarajućih matrica koje opisuju model vozila (vidi 3.3.2).

Za dobivanje indeksa performansi ovjesa ponovno provodimo analizu kovarijanci. Razlika u odnosu na kontinuirani sustav je u tome što koristimo diskretnu verziju jednadžbe kovarijanci, koja je slična Lyapunovljevoj diskretnoj jednadžbi [24]:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_{cl} \mathbf{X} \mathbf{A}_{cl}^T + \mathbf{Q}_{in} \quad (3.73)$$

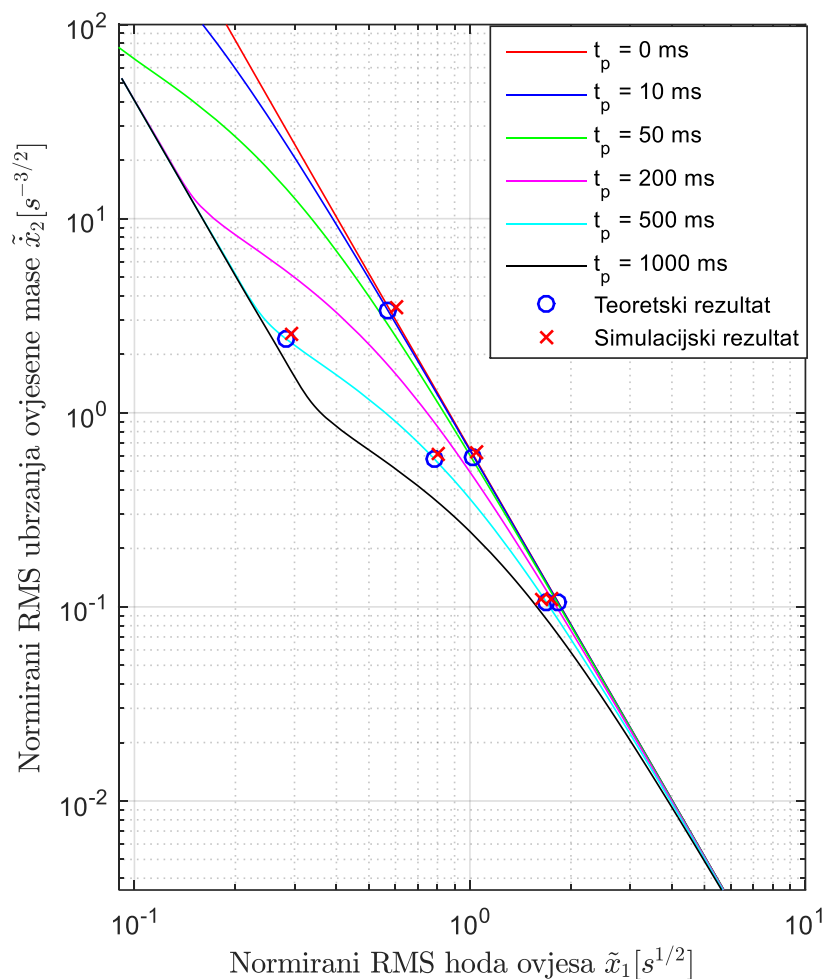
gdje je \mathbf{X} normirana matrica kovarijanci, a matrice \mathbf{A}_{cl} i \mathbf{Q}_{in} su dane izrazima:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{cl} &= \mathbf{A}_{aug} - \mathbf{B}_{aug} \mathbf{K}_{aug} \\ \mathbf{A}_{aug} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{2 \times 2} & \mathbf{A}_2^{2 \times N} \\ \mathbf{0}^{N \times 2} & \mathbf{A}_3^{N \times N} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{aug} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_v^{2 \times 1} \\ \mathbf{0}^{N \times 1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{aug} &= [\mathbf{K}_1 \quad \mathbf{K}_2] \\ \mathbf{Q}_{in} &= \mathbf{G}_{aug} \mathbf{G}_{aug}^T \\ \mathbf{G}_{aug} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{2 \times 1} \\ \mathbf{G}_r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Indeksi performansi, tj. normirane RMS vrijednosti ubrzanja ovještene mase i hoda ovjesa dobivene su numerički rješavanjem jednadžbe (3.73) primjenom naredbe *dlyap* te su kao i kod slučaja bez unaprijednog djelovanja provjerene simulacijski.

Rezultati prikazani na slici 13 dobiveni su uz vrijeme uzorkovanja $T_s=1$ ms, a vrijeme unaprijednog poznavanja ceste je povećavano od $t_p=0$ ms do $t_p=1000$ ms, što rezultira s jednakim brojem stanja ceste (vidi izraz 3.62). U praktičnoj primjeni ovako nisko vrijeme uzorkovanja je nerealno, ali ovdje je korišteno kako bi se mogla provesti usporedba s performansama kontinuiranog regulatora s unaprijednim poznavanjem profila ceste danog u

[33]. Iz prikazanih rezultata slijedi da uz 1000 ms unaprijednog poznavanja profila ceste, ubrzanje ovješene mase možemo smanjiti 16 puta uz zadržavanje hoda ovjesa (npr. uz $\tilde{x}_1 = 0,3 \text{ s}^{1/2}$ bez unaprijednog djelovanja dobivamo $\tilde{x}_2 = 24,3 \text{ s}^{-3/2}$, dok je s unaprijednim djelovanjem $\tilde{x}_2 = 1,52 \text{ s}^{-3/2}$), što se podudara s rezultatima prikazanim u [6, 33]. Simulacijski rezultati (crveni križići) vrlo dobro odgovaraju teorijskim rezultatima (plavi krugovi) dobivenim rješavanjem jednadžbe (3.73), uz manje razlike uzrokovane već spomenutim razlozima (vidi 3.2.2)



Slika 13. Usporedba teorijskih i simulacijskih rezultata s unaprijednim poznavanjem profila ceste za različite iznose težinskog koeficijenta r i različita vremena t_p

3.3. Optimalno upravljanje modelom s dva stupnja slobode gibanja

Model ovjesa s dva stupnja slobode gibanja dan je u poglavlju 2 izrazom (2.6) te predstavlja nadogradnju modela s jednim stupnjem slobode gibanja jer uključuje prethodno zanemarenu neovješenu masu. Uvođenjem neovještene mase uvodimo dodatni indeks performansi vezan uz upravljivost vozila, pa je funkcija cilja optimalnog upravljanja za ovaj model dana izrazom [6, 17]:

$$\min [PI = E(r_1 x_1^2 + r_2 x_3^2 + \dot{x}_4^2)] \quad (3.75)$$

gdje $E(x_1^2)$ predstavlja indeks performanse vezan uz upravljivost vozila, $E(x_3^2)$ predstavlja indeks performanse hoda ovjesa (vidi potpoglavlje 3.1.3), a $E(\dot{x}_4^2) = E(u^2)$ u slučaju modela (2.7) predstavlja indeks performanse udobnosti tj. penalizaciju ubrzanja ovještene mase a ujedno i upravljačke varijable u slučaju modela (2.7). U slučaju modela (2.6), u kojem nisu izostavljene pasivne komponente, raspisivanjem izraza $E(\dot{x}_4^2)$ pojavljuju se, osim penalizacije upravljačke varijable, i mješoviti članovi. Težinske koeficijente r_1 i r_2 namješta dizajner i oni određuju u kojoj se mjeri penalizira deformacija pneumatika i hod ovjesa, dok je penalizacija ubrzanja ovještene mase trajno jednaka jedinici.

Zapisivanjem izraza (3.75) u matričnom obliku (3.7) dobivamo matrice **Q**, **R** i **N**. Za model dan prostorom stanja (2.7) u kojem su izostavljene pasivne komponente, matrice su jednake:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \frac{1}{m_s^2} \quad (3.76)$$

Kod modela (2.6) u kojem su pasivne komponente prisutne i koji je pogodan za dobivanje matrice optimalnih pojačanja za poluaktivni ovjes (vidi poglavlje 4), težinske matrice su jednake:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_s^2}{m_s^2} & -\frac{k_s b_s}{m_s^2} & -\frac{b_s^2}{m_s^2} \\ 0 & -\frac{k_s b_s}{m_s^2} & \frac{k_s^2}{m_s^2} + r_2 & \frac{k_s b_s}{m_s^2} \\ 0 & -\frac{b_s^2}{m_s^2} & \frac{k_s b_s}{m_s^2} & \frac{b_s^2}{m_s^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{b_s}{m_s^2} \\ \frac{k_s}{m_s^2} \\ \frac{b_s}{m_s^2} \end{bmatrix}, \quad R = \frac{1}{m_s^2} \quad (3.77)$$

Optimalni upravljački zakon koji minimizira funkciju cilja (3.75) dan je izrazom (3.2) ili (3.5) ovisno o tome upravlja li se modelom (2.6) ili (2.7), te se sukladno tome koriste težinske matrice (3.76) ili (3.77).

Vektor izlaza za model sa dva stupnja slobode gibanja definiran je sljedećim izrazom:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Na temelju vektora izlaza (3.78) definirane su matrica izlaza \mathbf{C} i matrica prijenosa sustava \mathbf{D} :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \mathbf{A}(4,:) & & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{B}(4,:) \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

gdje $\mathbf{A}(4,:)$ označava četvrti redak matrice \mathbf{A} .

3.3.1. Analiza kovarijanci modela s dva stupnja slobode gibanja

Analiza kovarijanci za model s dva stupnja slobode gibanja provodi se na jednak način kao i za model s jednim stupnjem slobode gibanja (vidi potpoglavlje 3.2.1). Izračunata pojačanja na način opisan u prethodnom odjeljku koriste se za dobivanje matrice sustava zatvorenog regulacijskog kruga (3.51), te konačno rješavanjem jednadžbe kovarijanci (3.52) uz odgovarajuću matricu \mathbf{G} iz (2.6) odnosno (2.7) dobivamo normirane RMS vrijednosti vektora stanja. Normirane vrijednosti označavaju se sa tildom, pa je tako primjerice normirani RMS deformacije pneumatika $\tilde{x}_1 = x_{1,\text{rms}}/\sqrt{2\pi AV}$. Uvrštavanjem (3.79) u (3.57) i zatim u (3.13) dobivamo normirane RMS vrijednosti vektora izlaza. Cijeli postupak je, kao i za model s jednim stupnjem slobode, implementiran u MATLAB-u korištenjem istog alata kao i ranije te su rezultati prikazani na sljedećim slikama dobiveni numerički.

Krivulja optimalnih performansi koja se dobila za model s jednim stupnjem slobode gibanja (vidi sliku 8) prelazi u površinu optimalnih performansi kod modela s dva stupnja slobode gibanja jer su u funkciji cilja (3.75) prisutna dva težinska koeficijenta, r_1 koji penalizira deformaciju pneumatika i r_2 koji penalizira hod ovjesa.

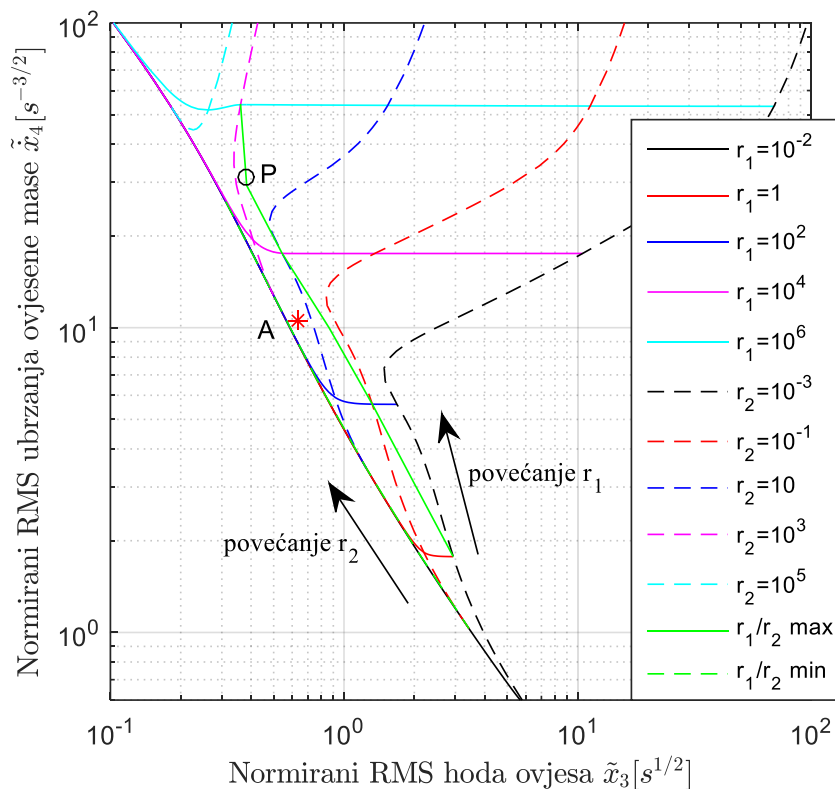
Slika 14 prikazuje normirane RMS vrijednosti ubrzanja ovještene mase u odnosu na normirane RMS vrijednosti hoda ovjesa, to jest, prikazuje kompromis između udobnosti (gdje manje

ubrzanje predstavlja veću udobnost) i hoda ovjesa u obliku *carpet* dijagrama² s logaritamskim mjerilom. Pritom su prikazane krivulje dobivene uz zadržavanje jednog težinskog koeficijenta konstantnim a mijenjanjem drugog. Sve ostale vrijednosti padaju u područje između graničnih krivulja $r_1 = 0,01$ ($r_1 \approx 0$) koja ujedno kvalitativno odgovara krivulji optimalnih performansi za model s jednim stupnjem slobode gibanja (vidi npr. [6, 17] za detaljniju raspravu o kvantitativnim razlikama) i $r_2 = 0,001$ ($r_2 \approx 0$) koja predstavlja ekstremni slučaj bez penalizacije hoda ovjesa. Slika 15 prikazuje kompromis između udobnosti i upravljivosti, gdje manja normirana RMS vrijednost deformacije pneumatika predstavlja bolju upravljivost vozilom, i prikazane su iste krivulje kao na slici 14. Prikazani rezultati potvrđuju očekivano ponašanje, da se povećanjem r_2 hod ovjesa smanjuje i ubrzanje ovješene mase povećava (udobnost vožnje se smanjuje), i slično da se povećanjem r_1 deformacija pneumatika smanjuje (upravljivost se povećava) i ubrzanje ovješene mase povećava (udobnost vožnje pada).

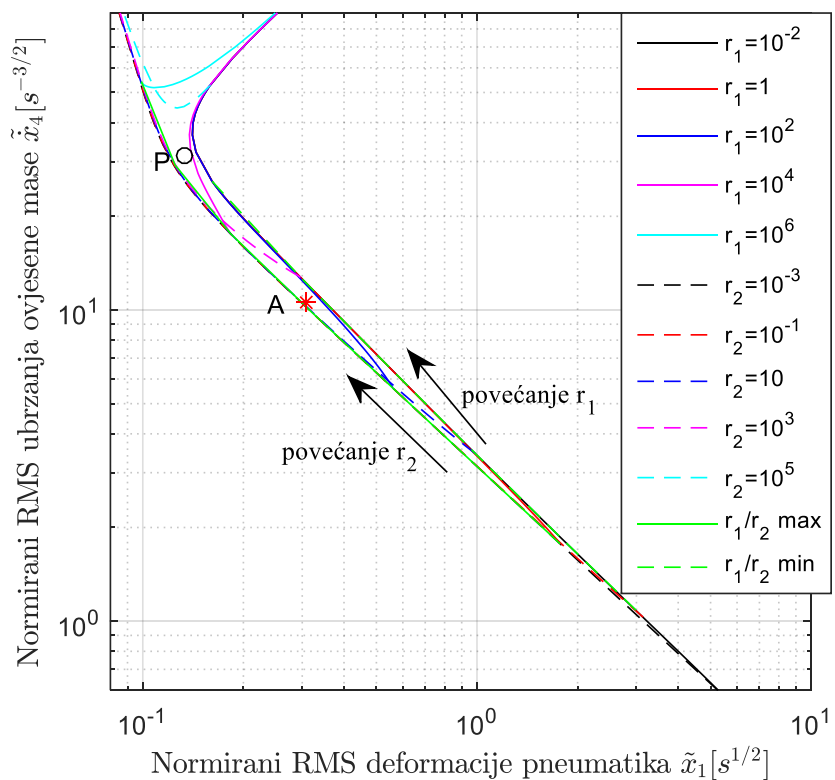
Na temelju rezultata prikazanih na slici 16, gdje dan kompromis između deformacije pneumatika (upravljivosti) i hoda ovjesa može se zaključiti da povećavanje omjera težinskih koeficijenata r_1/r_2 iznad $(r_1/r_2)_{\max}=1000$ ne rezultira dodatnim smanjenjem deformacije pneumatika i hoda ovjesa, već deformacija pneumatika ostane približno konstantna a hod ovjesa raste (vidi zelenu punu liniju na slikama 14, 15 i 16). Isto vrijedi i za ubrzanje ovješene mase na slici 14, povećavanjem omjera r_1/r_2 ubrzanje ovješene mase ostane približno konstantno a hod ovjesa raste. Dakle, granična krivulja $(r_1/r_2)_{\max}$ i krivulja $r_1 = 0,01$ ($r_1 \approx 0$) odnosno krivulja $(r_1/r_2)_{\min}$ obuhvaćaju područje sa podešenjima koja su značajna za primjenu jer kod tih podešenja ne dolazi do zasićenja jednog od kriterija uz značajno pogoršanje barem jednog od preostala dva kriterija.

Točka P na dijagramima odgovara performansama pasivnog ovjesa s parametrima prema tablici 1, dok točka A odgovara performansama aktivnog ovjesa iz ilustrativnog primjera koji je dan u nastavku.

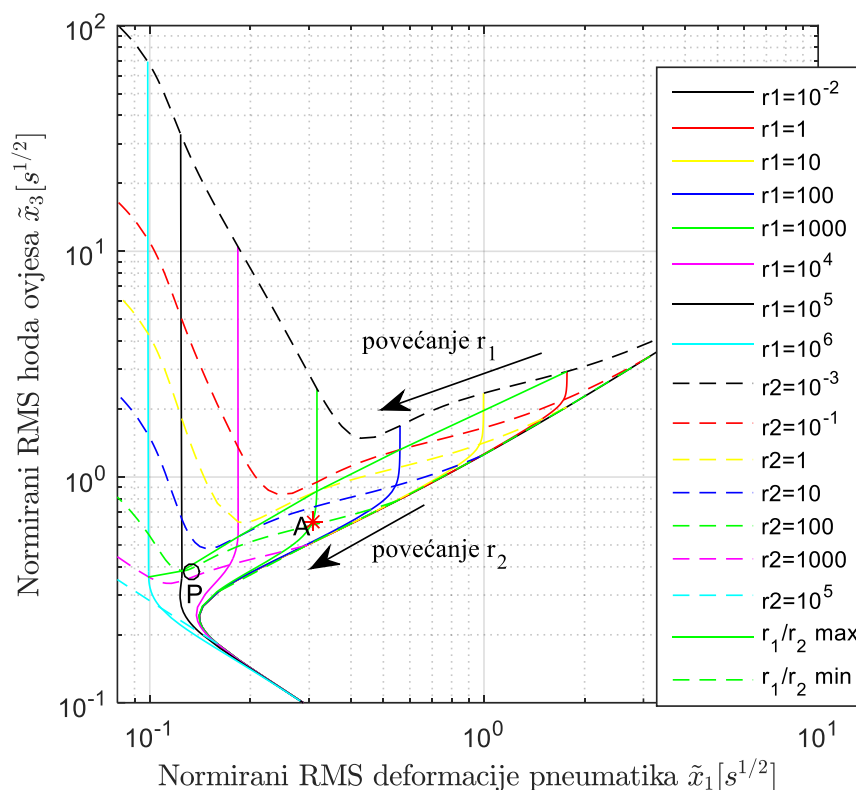
² eng. *carpet plot* je naziv za dvodimenzionalni (2D) dijagram koji prikazuje ovisnost o više varijabli



Slika 14. Kompromis između udobnosti i hoda ovjesa za model s dva stupnja slobode gibanja [3; 6; 7, pog. 31]



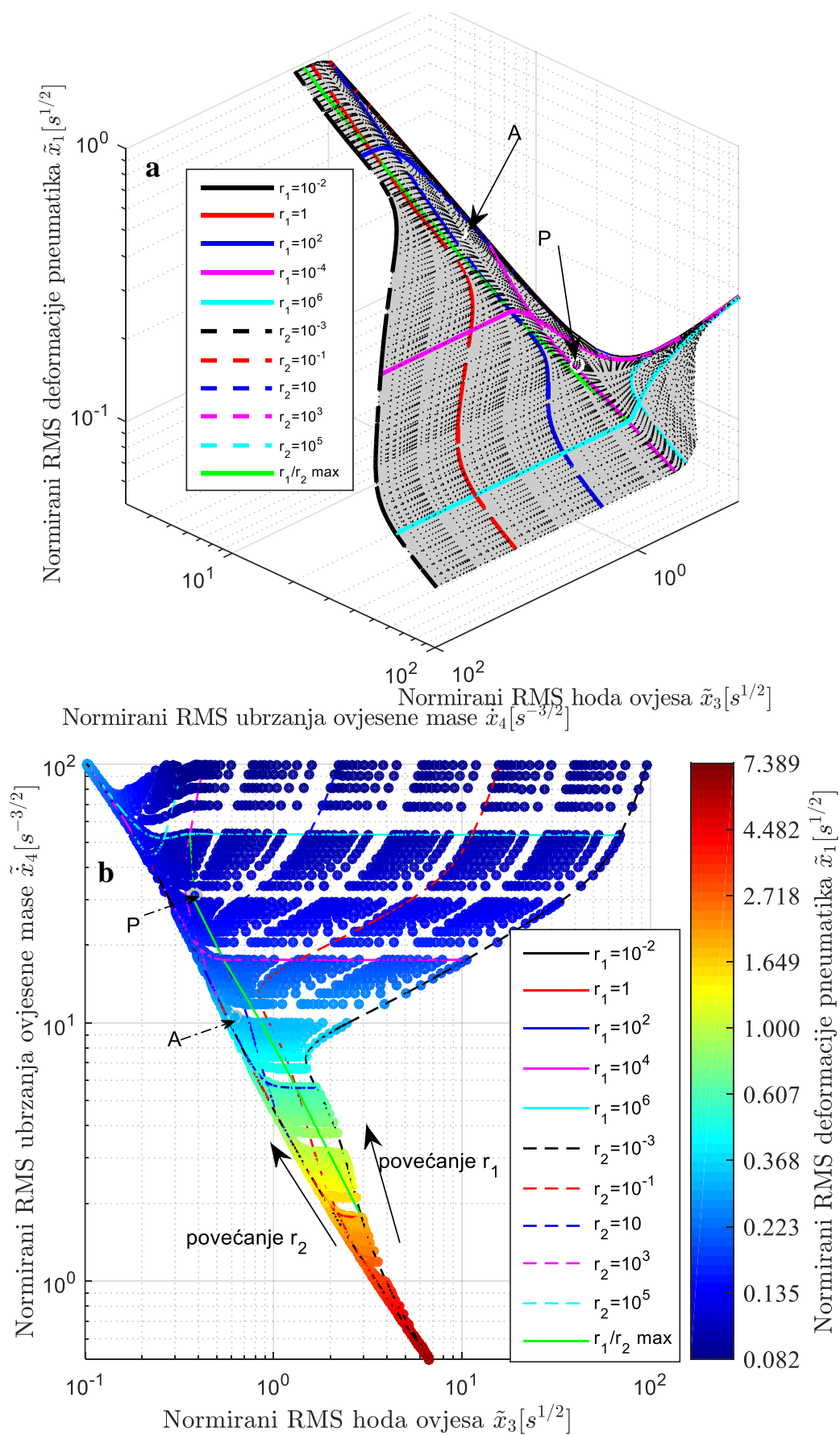
Slika 15. Kompromis između udobnosti i upravljivosti za model s dva stupnja slobode gibanja [3; 6; 7, pog. 31]



Slika 16. Kompromis između hoda ovjesa i deformacije pneumatika za model s dva stupnja slobode gibanja

Za bolje razumijevanje performansi optimalnog aktivnog ovjesa izrađen je 3D dijagram prikazan na slici 17 a, koji objedinjuje normirane RMS vrijednosti ubrzanja ovješene mase (y-os), hoda ovjesa (x-os) i deformacije pneumatika (z-os) te jasno prikazuje optimalnu (3D Pareto) površinu. Ovakav 3D dijagram omogućava kompaktno prikazivanje i eventualnog četvrtog kriterija uvođenjem boje kao dodatne osi. Na slici 17 b prikazan je izrađeni dijagram koji objedinjuje ubrzanje ovješene mase (y-os), hod ovjesa (x-os) i deformaciju pneumatika (boja). Uvođenjem takvog dijagrama olakšavamo prikaz jer dva 2D dijagrama (sliku 14 i 15) zamjenjujemo jednim 3D dijagramom (2D + dodatna os u boji) te se jasno vidi da povećavanjem omjera r_1/r_2 iznad granične vrijednosti ubrzanje ovješene mase ostaje konstantno, hod ovjesa znatno raste a deformacija pneumatika gotovo se ne mijenja.

Za model sa dva stupnja slobode gibanja je također izrađen simulacijski model u Simulink-u te su dobiveni simulacijski rezultati postupkom opisanom u odjeljku 3.2.2. Usporedba teorijskih (idealnih) performansi dobivenih analizom kovarijanci i performansi dobivenih simulacijom prikazana je na slici 18 te su dobiveni rezultati vrlo slični, uz male razlike koje su objašnjene u odjeljku 3.2.2, što potvrđuje preciznost simulacijskih modela i postupka.



Slika 17. Kompromis između udobnosti, hoda ovjesa i upravljivosti na a) 3D dijagramu s tri osi, b) 2D dijagramu + treća os dana u boji

Dijagrami dani na slikama 14 i 15 mogu se iskoristiti za određivanje pojačanja regulatora uz zadane željene performanse. Na primjer, ako se zahtijeva da tokom vožnje brzinom $V = 88,5$ km/h cestom čiji je koeficijent hrapavosti jednak $A = 4,9 \times 10^{-6}$ m, standardna devijacija deformacije pneumatika bude zadržana unutar 2,54 cm od ravnotežne vrijednosti 99,7% vremena i da standardna devijacija hoda ovjesa bude zadržana unutar 7,62 cm od ravnotežne vrijednosti 99,7% vremena, postavlja se pitanje koja je najmanja moguća standardna devijacija ubrzanja ovještene mase uz pretpostavku da je cesta okarakterizirana normalnom razdiobom [3, 6, 7 pog. 31].

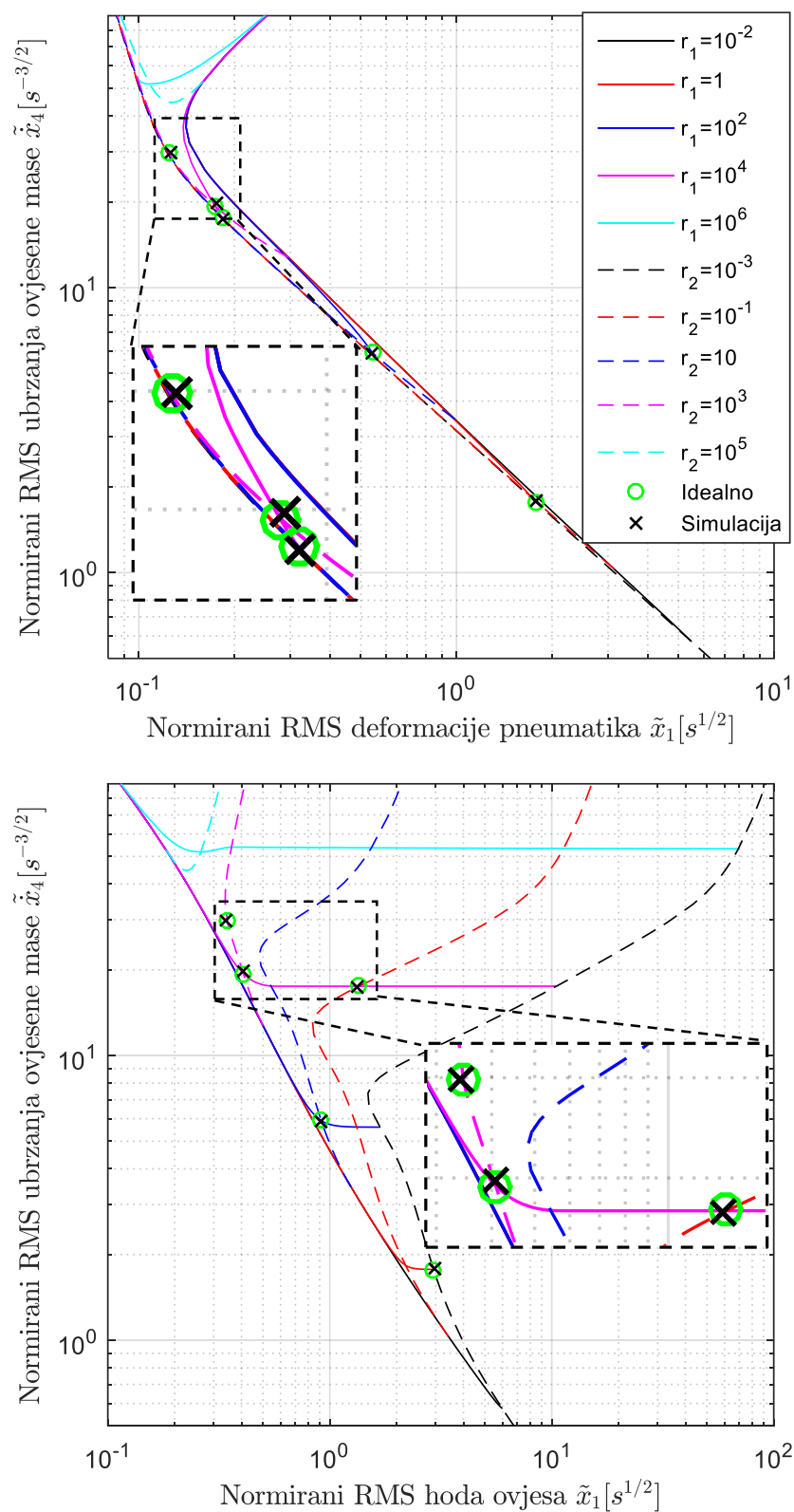
Prvo, zadana pretpostavka normalne razdiobe i vremenski zahtjev nad standardnim devijacijama od 99,7% vremena implicira 3σ pravilo, iz čega slijedi da bi standardne devijacije trebale biti manje od trećine zadane vrijednosti, tj. $x_{1,rms} < 0,866$ cm, $x_{3,rms} < 2,54$ cm. Zadane vrijednosti nisu smišljene za ovaj primjer, već predstavljaju granični slučaj u kojem se maksimalno iskorištavaju mogućnosti ovjesa. Naime, za dane parametre vozila i gume ravnotežna vrijednost deformacije pneumatika iznosi -2,7 cm uslijed težine, pa zadanim ograničenjem želimo garantirati da neće doći do odvajanja od podloge 99,7% vremena u vožnji. Isto tako, hod ovjesa je u većini vozila ograničen na $\pm 7,5$ cm do ± 10 cm od ravnotežne vrijednosti pa nastojimo izbjeći slučaj udaranja u granične odbojnice. Ciljane normirane vrijednosti su za danu brzinu i cestu jednake:

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_{1,rms}}{\sqrt{2\pi AV}}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{x_{3,rms}}{\sqrt{2\pi AV}} \quad (3.80)$$

$$\tilde{x}_1 < 0.314 \text{ s}^{1/2}, \quad \tilde{x}_3 < 0.944 \text{ s}^{1/2}$$

Općenito je teže zadovoljiti uvjet nad deformacijom pneumatika pa se prvo izračunava najmanje ubrzanje uz zadovoljavanje tog uvjeta. U [3, 6, 7 pog. 31] je to rađeno ručno korištenjem dijagrama 14 i 15; ovdje je to odrađeno numerički korištenjem MATLAB-a. Na slici 17 svaka točka na dijagramu odgovara jednoj kombinaciji težinskih koeficijenata. Filtriranjem rezultata možemo izdvojiti sve točke koje zadovoljavaju tražene zahtjeve i zatim odrediti točku s najmanjim ubrzanjem ovještene mase. Konačno rješenje će ovisiti o gustoći generiranih točaka (broju kombinacija težinskih koeficijenata r_1 i r_2).

Iz dijagrama je u [3, 6] dobiveno rješenje s normiranim RMS vrijednostima $\tilde{x}_1 = 0,31 \text{ s}^{1/2}$, $\tilde{x}_4 = 10,9 \text{ s}^{3/2}$, $\tilde{x}_3 < 0,605 \text{ s}^{1/2}$ s težinskim koeficijentima $r_1 = 1100$ i $r_2 = 100$, dok su numerička rješenja $\tilde{x}_1 = 0,3064 \text{ s}^{1/2}$, $\tilde{x}_4 = 10,5249 \text{ s}^{3/2}$, $\tilde{x}_3 < 0,6308 \text{ s}^{1/2}$ s težinskim koeficijentima $r_1 = 1000$ i $r_2 = 70$. Numeričko rješenje je označeno s A na slikama 14, 15, 16 i 17.



Slika 18. Usporedba teorijskih (idealnih) i simulacijskih rezultata za model sa dva stupnja slobode gibanja

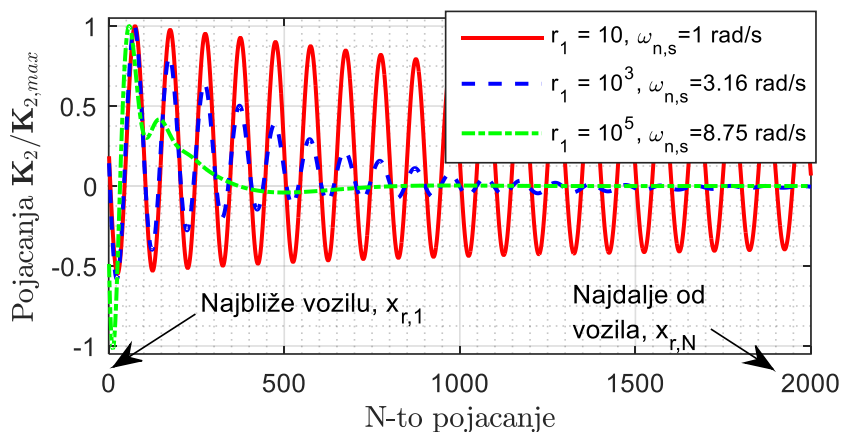
3.3.2. *Primjena regulacije s unaprijednim poznavanjem profila ceste na model s dva stupnja slobode gibanja*

Metodologija diskretne regulacije s unaprijednim poznavanjem profila ceste detaljno je prikazana u odjeljku 3.2.3. Ista se može primjeniti na modelu s dva stupnja slobode gibanja uz napomenu da se koriste odgovarajuće matrice modela vozila dane izrazima (2.6) ili (2.7) i težinske matrice dane izrazima (3.76) ili (3.77) ovisno o tome jesu li pasivne komponente uključene u model ili izostavljene. Regulacija s unaprijednim poznavanjem profila ceste za kontinuirani model s dva stupnja slobode gibanja razmatrana je u [22] i [23], dok je ovdje korištena diskretna regulacija koja je prikladnije za implementaciju.

Na temelju analize kovarijanci u odjeljku 3.3.1 pokazano je da odnos težinskih koeficijenata r_1/r_2 ne treba prelaziti 1000, a vrlo dobar kompromis je moguće postići i s nižim odnosom. Stoga su ovdje analizirana dva slučaja: prvi u kojem je odnos $r_1/r_2=10$ i drugi u kojem je odnos za red veličine veći, odnosno $r_1/r_2=100$ (više penalizira deformaciju pneumatika). Vremena unaprijednog poznavanja profila ceste u rasponu su od 100 ms do 2 s. Na primjer, uz pretpostavku da se cesta snima stereo kamerom u duljini od 20 m ispred vozila, pri brzini od 144 km/h (40 m/s) vrijeme unaprijednog poznavanja ceste je 500 ms, a pri manjim brzinama raste do 2 s pri brzini od 36 km/h (10 m/s). Iz toga slijedi da ovisno o brzini vozila unaprijedno djelovanje treba adaptirati jer se mijenja vrijeme unaprijednog poznavanja profila ceste. Ovaj se problem može riješiti adaptiranjem broja i iznosa pojačanja regulatora (kraće vrijeme zahtjeva manje pojačanja) ili je moguće koristiti isti regulator za sve iznose vremena unaprijednog poznavanja ceste s jednakim brojem pojačanja ali mijenjati mjesto ulaza prvog poznatog uzorka ceste u regulator [23]. Vrijeme uzorkovanja je izabrano $T_s=1$ ms. U praksi je ovako kratko vrijeme uzorkovanja teško ostvarivo jer: i) rezultira velikim brojem pojačanja za stanja ceste i zahtjeva visoku procesorsku moć računala, ii) ograničeno je opremom, prvenstveno kamerom i njenim brojem slika u sekundi. Međutim, ovdje je korišteno kako bi se približili kontinuiranom sustavu i dobili uvid u moguća poboljšanja korištenjem unaprijedne informacije o profilu ceste.

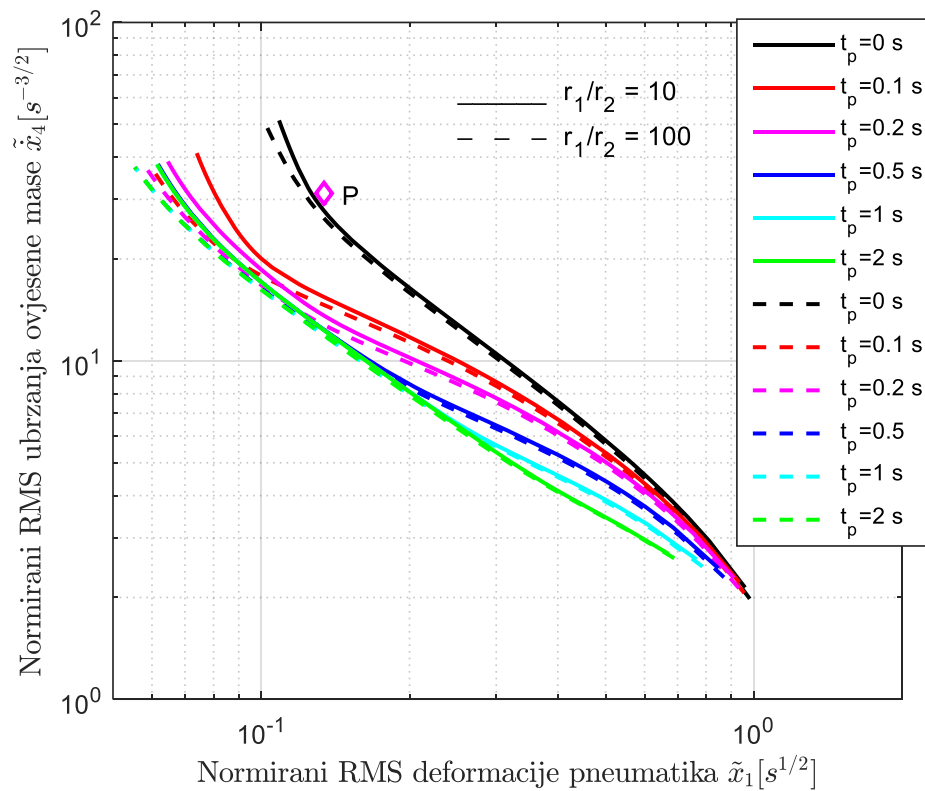
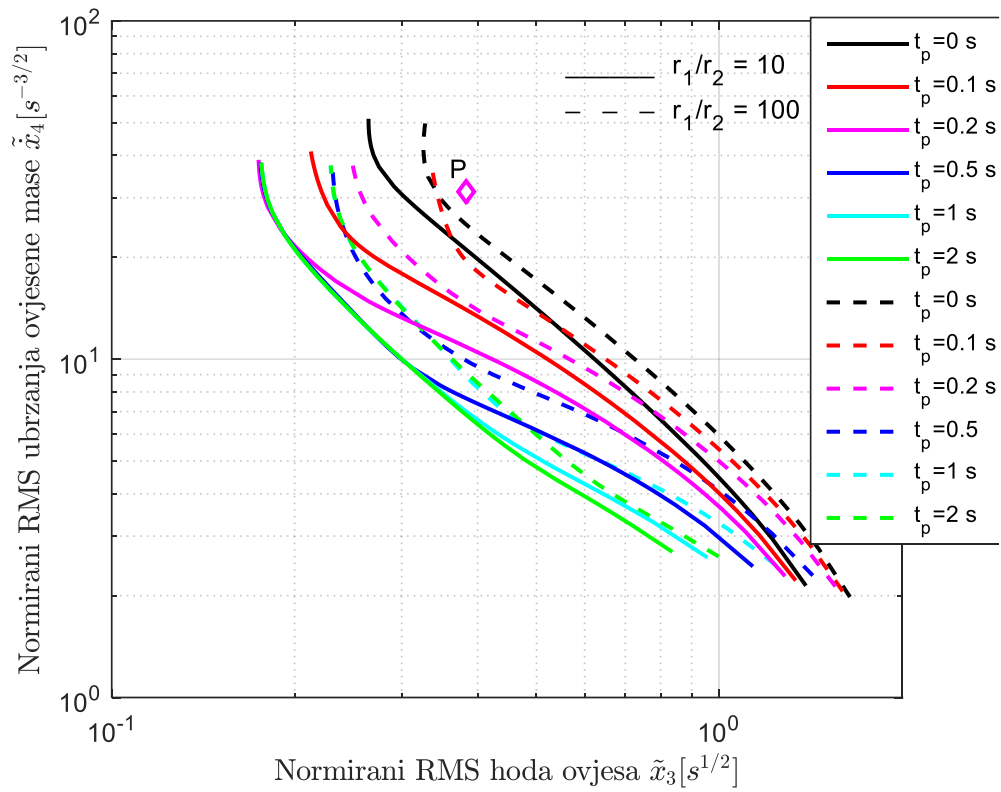
Slika 20 prikazuje usporedbu regulacije aktivnim ovjesom s i bez unaprijednog poznavanja ceste na *carpet* dijagramima gdje je prikazan kompromis između udobnosti i hoda ovjesa (gore) i kompromis između udobnosti i upravljivosti (dolje). Prvo, unaprijedno djelovanje pomiče krivulje optimalnih performansi prema ishodištu, tim više što je vrijeme unaprijednog poznavanja ceste t_p veće, što znači da poboljšava sve performanse. Međutim, za podešenja u

kojima su r_1 i r_2 visoki (gornji lijevi kut slike) dolazi do zasićenja performansi tj. povećavanje vremena t_p ne rezultira dodatnim poboljšanjima (vidi zelenu, plavu i ljubičastu liniju lijevo od točke P). Razlog zasićenja je u samom izračunavanju pojačanja \mathbf{K}_2 u izrazu (3.71) gdje se matrica sustava zatvorenog regulacijskog kruga vozila potencira s najvišom potencijom za stanje ceste ispred vozila a sa smanjenom potencijom što je stanje ceste dalje od vozila. Kako je ona stabilna s negativnim polovima, smanjenje potencije će rezultirati manjim iznosom pojačanja što znači da se utjecaj poznavanja profila ceste smanjuje s udaljavanjem od vozila. Isto ponašanje je primjećeno i za kontinuirani slučaj [22]. Vrijeme t_p kod kojeg dolazi do zasićenja performansi ovisi o podešenju aktivnog ovjesa (različiti polovi sustava) i ukoliko podešenje rezultira niskom prirodnom frekvencijom ovješene mase $\omega_{n,s}$ (veći period oscilacija) potrebno je veće vrijeme t_p i obrnuto. Za fiksni omjer težinskih koeficijenata r_1/r_2 prirodna frekvencija ovješene mase raste s povećanjem težinskih koeficijenata pa je tako za $r_1/r_2=10$ najniža u donjem desnom uglu i iznosi $\sim 0,16$ Hz a najviša u gornjem desnom uglu i iznosi $\sim 1,67$ Hz (za ostale detalje o polovima vidi poglavlje 4.). Slika 19 prikazuje normirani iznos pojačanja za tri različite postavke aktivnog ovjesa, gdje je jasno vidljivo da je za "tvrđi" (r_1 veći, $\omega_{n,s}$ veća) potrebno kraće vrijeme t_p (manji broj pojačanja na slici, $T_s=1$ ms) da pojačanja \mathbf{K}_2 postanu beznačajna, tj. da dođe do zasićenja performansi regulatora s unaprijednim djelovanjem.



Slika 19. Pojačanja K_2 za različita podešenja aktivnog ovjesa

Koliko je unaprijedno poznavanje profila ceste značajno najbolje je ilustrirati kroz primjer. Za iznos normirane RMS vrijednosti deformacije pneumatika aktivnog ovjesa koja je jednaka onoj od pasivnog ovjesa (vertikalna linija kroz P), aktivni ovjes rezultira ~ 15 % nižim ubrzanjem ovješene mase, dok je uz $t_p=500$ ms ubrzanje ovješene mase ~ 61 % niže. Značajna je i činjenica da uz unaprijedno poznavanje ceste možemo postići i ~ 50 % bolju upravljivost vozilom (nižu deformaciju pneumatika) uz razinu udobnosti vožnje koja je jednaka onoj kod pasivnog vozila (horizontalna linija kroz P).



Slika 20. Optimalne performanse aktivnog ovjesa bez i s unaprijednim regulacijskim djelovanjem po budućem profilu ceste za različita vremena unaprijednog poznavanja profila ceste t_p i različite postavke težinskih koeficijenata r_1 i r_2 , za model s dva stupnja slobode gibanja

3.4. Više-kriterijsko optimiranje pojačanja regulatora pomoću MOGA-II genetskog algoritma

Linearno kvadratično upravljanje koje rezultira regulatorom po varijablama stanja s optimalnim pojačanjima izvodi se na temelju poznavanja linearnog modela vozila i optimalno je rješenje u tom slučaju. Međutim, optimiranjem pojačanja regulatora po varijablama stanja potencijalno se mogu dobiti optimalna pojačanja i za nelinearne modele vozila, a moguće je i optimirati parametre nelinearnog regulatora (npr. poluaktivni ovjes). Ideja je vidjeti je li moguće dobiti optimalne performanse prikazane u potpoglavljima 3.2 i 3.3 korištenjem naprednih nelinearnih optimizacijskih alata [34]. Ukoliko se pokaže da je to moguće, tada se korištenjem istog alata s velikom sigurnošću u dobivene rezultate može pristupiti optimiranju regulatora nelinearnih sustava.

Optimizacija je u ovom radu provedena korištenjem više-kriterijskog genetskog algoritma MOGA-II (eng. *Multi Objective Genetic Algorithm*) koji je napravljen s ciljem brzog konvergiranja Pareto optimalnim rješenjima [35]. MOGA-II je dio modeFRONTIER programskog paketa za optimiranje [36].

Temelj optimizacije je simulacijski model izrađen u MATLAB/Simulink-u koji kao ulazni argument prima parametre koji se optimiraju, a izlazni su argumenti kriteriji optimizacije. Simulacijski modeli koji su bili korišteni za simulacijsku provjeru analize kovarijanci, za koje je pokazano da su dovoljno precizni, korišteni su ovdje u optimizaciji.

Prije samog pokretanja optimizacije potrebno je zadati početnu populaciju ulaznih parametara i namjestiti postavke algoritma. Početna populacija ulaznih parametara, tzv. DOE (eng. *Design Of Experiment*) može se dobiti: i) slučajnim generiranjem (eng. *random*), ii) učitavanjem iz tablica (npr. MS Excel), tada korisnik sam definira početnu populaciju ili iii) korištenjem jednog od preddefiniranih algoritama, poput Sobolovog generatora (eng. *Sobol random sequence generator*) koji generira uniformno raspodjeljene početne parametre. Ovdje je korištena kombinacija Sobolovog generatora i ručnog zadavanja ulaznih parametara. Naime, zbog velikog raspona vrijednosti ulaznih varijabli, a malog broja DOE, Sobolov generator generira početnu populaciju koja ne pokriva sve redove veličina već samo najveći. Stoga je Sobol generator korišten za dobivanje nekoliko (5-10) početnih kombinacija ulaznih parametara koje su zatim ručno skalirane kroz nekoliko redova veličine (npr. 5 Sobol DOE kroz 5 redova veličine, $5 \times 5 = 25$ početnih kombinacija) kako bi se pokrilo šire područje mogućih rješenja. MOGA-II koristi elitizam za višekriterijsko pretraživanje, a parametri algoritma, poput vjerojatnosti mutacije, ostavljeni su prema preddefiniranim vrijednostima, dok je broj evaluacija ograničen na 500.

ModeFRONTIER (MF) omogućava postavljanje ograničenja izlaznih kriterija i ukoliko neki dizajn rezultira s iznosom kriterija izvan ograničenja, taj se dizajn automatski označava kao nemogući (eng. *unfeasible*) dizajn te se može naknadno filtrirati. Ukoliko dizajn rezultira destabilizacijom sustava, simulacija se automatski prekida i dizajn se označava kao greška te se također naknadno filtrira. Kriteriji optimizacije mogu se minimizirati ili maksimizirati. U ovom je radu provedena minimizacija normiranih RMS vrijednosti izlaznih varijabli koje su izabrane kao kriteriji optimizacije.

3.4.1. Optimizacija pojačanja kod modela s jednim stupnjem slobode gibanja

Konfliktni kriteriji koji se minimiziraju pri optimiranju pojačanja regulatora modela s jednim stupnjem slobode gibanja su normirane RMS vrijednosti ubrzanja ovješene mase \tilde{x}_2 i hoda ovjesa \tilde{x}_1 :

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= \frac{x_{1,\text{rms}}}{\sqrt{2\pi AV}} \leq \tilde{x}_{1,\text{max}} = 10 \\ \tilde{x}_2 &= \frac{\dot{x}_{2,\text{rms}}}{\sqrt{2\pi AV}} \leq \tilde{x}_{2,\text{max}} = 100\end{aligned}\tag{3.81}$$

Kako bi lakše filtrirali nemoguće dizajнове, uvedena su gornja ograničenja kriterija u (3.81).

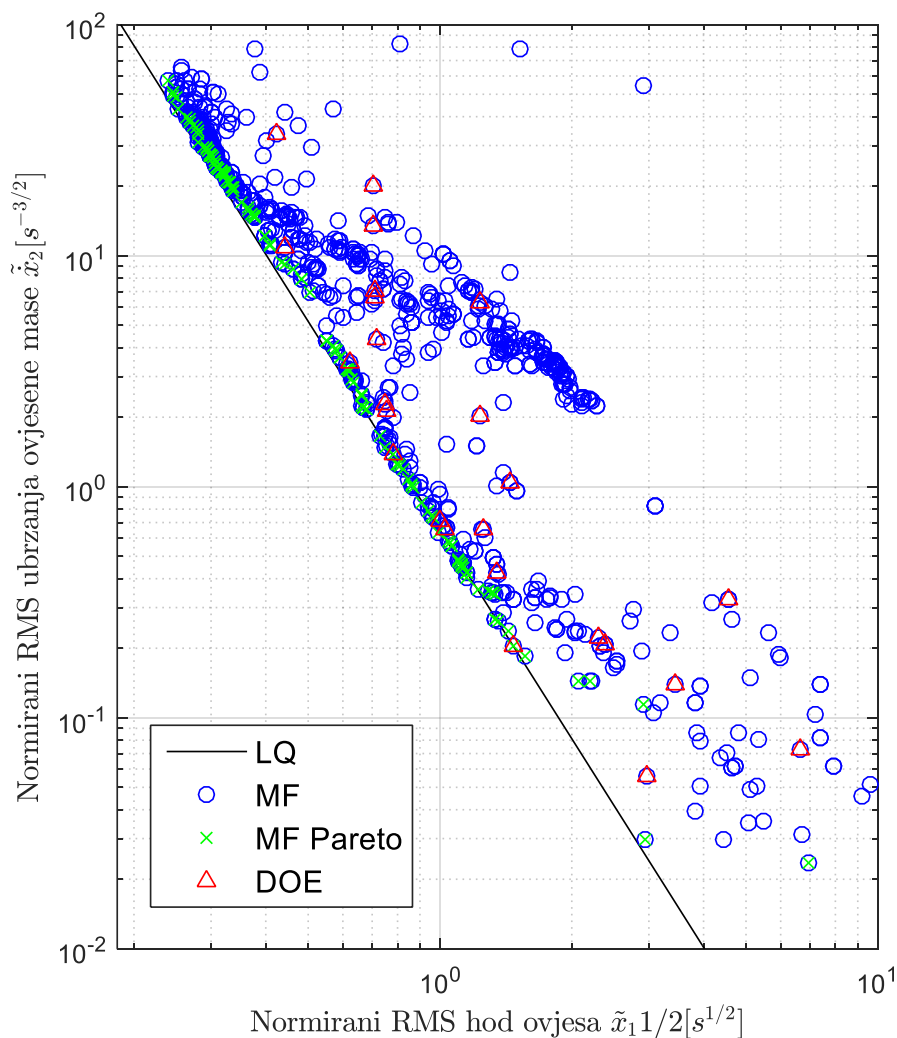
Parametri koji se optimiraju su pojačanja regulatora, k_1 i k_2 , te su također ograničena:

$$\begin{aligned}k_{1,\text{min}} &= 0 \leq k_1 \leq k_{1,\text{max}} = 1000 \\ k_{2,\text{min}} &= 0 \leq k_2 \leq k_{2,\text{max}} = 1000\end{aligned}\tag{3.82}$$

Postavljanje razumnih ograničenja ulaznih parametara (ovdje k_1 i k_2) može ubrzati optimizaciju jer se smanjuje broj grešaka i nemogućih dizajnova. Ograničenja se mogu temeljiti na određenim preliminarnim analizama, npr. analiza stabilnosti je u ovom slučaju dala jednostavno ograničenje da oba pojačanja moraju biti pozitivna. Kod nelinearnih modela ograničenja se mogu dobiti drugim načinima.

Rezultati dobiveni optimizacijom prikazani su na 21. Optimizacijski algoritam je iz početnih dizajnova (označeno DOE) generirao veliki broj rješenja (označeno MF), ali najbitnije je da Pareto optimalna rješenja (označeno MF Pareto) rezultiraju istim performansama kao i optimalno upravljanje (označeno LQ). Dakle, više-kriterijskim optimiranjem pojačanja moguće je dobiti optimalna pojačanja regulatora. Iako se vrijeme simulacije skalira prema prirodnoj frekvenciji ovješene mase, ono je tvrdo ograničeno na visoku vrijednost (npr. 5000 s) kako bi

se izbjegla preduga simulacija. Posljedica tog tvrdog ograničenja se može primjetiti u donjem desnom uglu slike gdje su pojačanja takva da je prirodna frekvencija ovješene mase vrlo niska i Pareto optimalna simulacijska rješenja odstupaju od LQ rješenja.



Slika 21. Usporedba idealnih (LQ) rezultata i optimizacijskih rezultata za model s jednim stupnjem slobode gibanja

3.4.2. Optimizacija pojačanja kod modela s dva stupnja slobode gibanja

Kriteriji koje je potrebno minimizirati kod modela s dva stupnja slobode gibanja su normirane RMS vrijednosti ubrzanja ovještene mase \tilde{x}_4 , deformacije pneumatika \tilde{x}_1 i hoda ovjesa \tilde{x}_3 :

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= \frac{x_{1,\text{rms}}}{\sqrt{2\pi AV}} \leq \tilde{x}_{1,\text{max}} = 10 \\ \tilde{x}_3 &= \frac{x_{3,\text{rms}}}{\sqrt{2\pi AV}} \leq \tilde{x}_{3,\text{max}} = 100 \\ \tilde{x}_4 &= \frac{\dot{x}_{4,\text{rms}}}{\sqrt{2\pi AV}} \leq \tilde{x}_{4,\text{max}} = 100\end{aligned}\tag{3.83}$$

Parametri koji se optimiraju su pojačanja regulatora, k_1 , k_2 , k_3 i k_4 , te su također ograničeni:

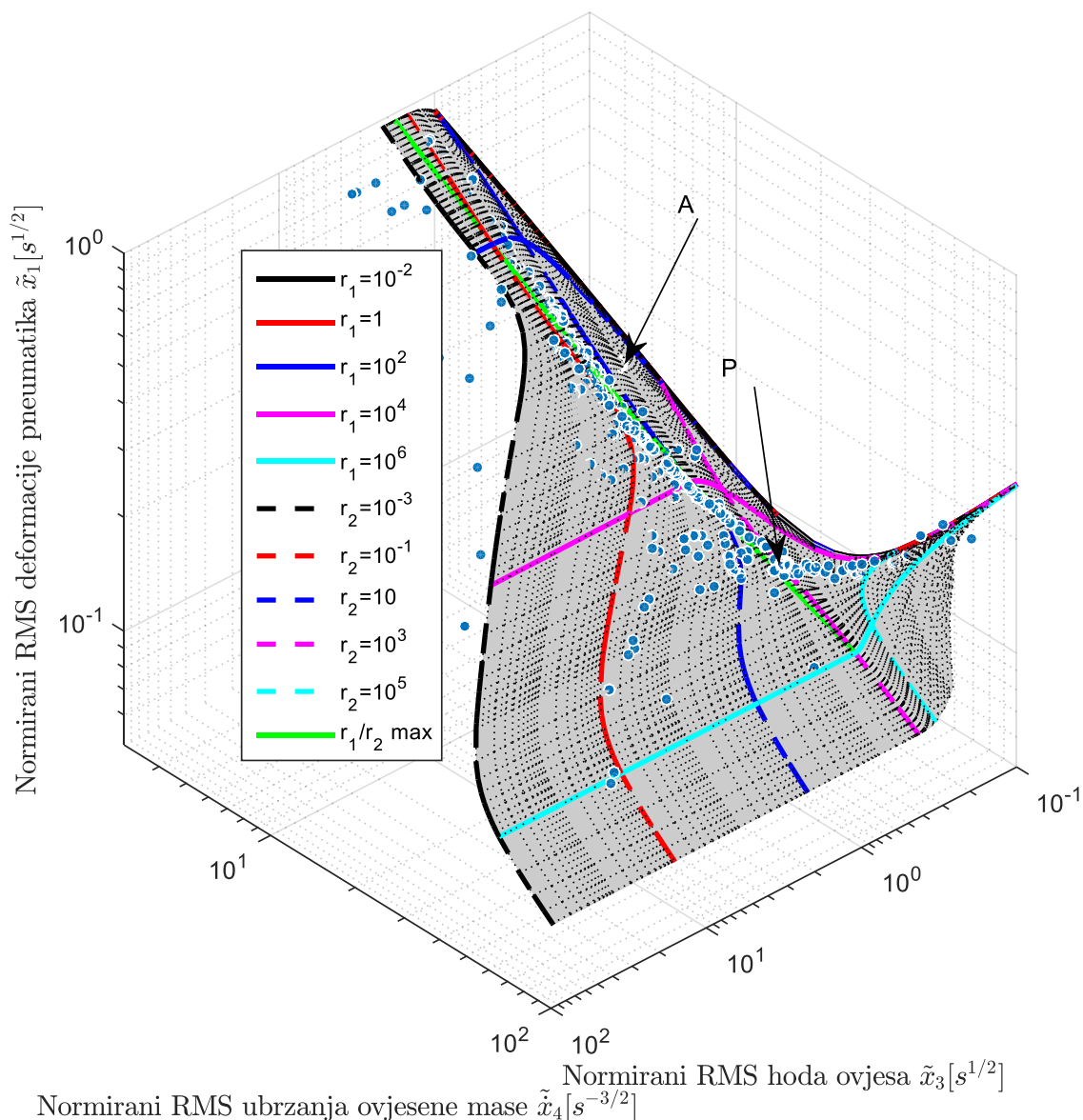
$$\begin{aligned}k_{1,\text{min}} &= -1000 \leq k_1 \leq k_{1,\text{max}} = 1000 \\ k_{2,\text{min}} &= -1000 \leq k_2 \leq k_{2,\text{max}} = 1000 \\ k_{3,\text{min}} &= -5000 \leq k_3 \leq k_{3,\text{max}} = 0 \\ k_{4,\text{min}} &= -5000 \leq k_4 \leq k_{4,\text{max}} = 0\end{aligned}\tag{3.84}$$

Ograničenja parametara u (3.84) djelomično su temeljena na analizi stabilnosti. Postavke optimizacije jednake su kao i u prethodnom (1DoF) slučaju.

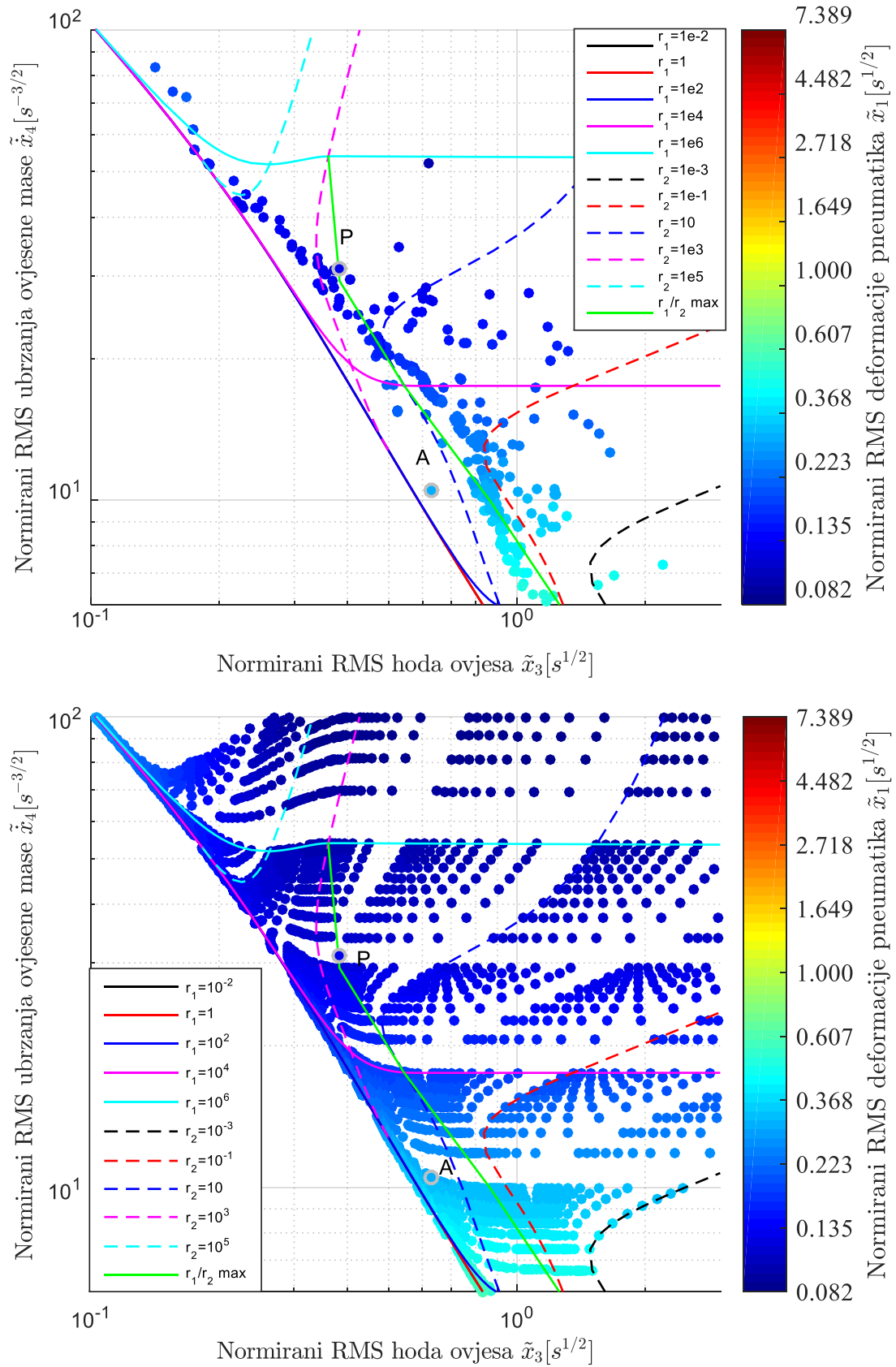
Usporedba rezultata optimizacije s rezultatima analize kovarijanci za linearni kvadratični regulator prikazom na *carpet* dijagramima je gotovo nemoguća jer je teško povezivati točke na dva različita dijagrama. Stoga je potrebno koristiti dijagrame koji omogućavaju prikaz sva tri kriterija na jednoj slici, poput onih sa slike 17.

Slika 22 prikazuje 3D usporedbu rezultata optimizacije (plavi puni krugovi) i optimalnih (LQ) rezultata analize kovarijanci (siva površina) a na slici 23 usporedno su prikazani rezultati optimizacije (gore) i rezultati analize kovarijanci iz odjeljka 3.3.1 (LQ, dolje). Iako optimizacija generira veliki broj mogućih rješenja, radi preglednosti prikazani su samo Pareto optimalni rezultati optimizacije. Na 3D dijagramu primjećujemo da su Pareto optimalna rješenja vrlo blizu LQ optimalne površine. Međutim, neka rješenja izlaze izvan LQ optimalne površine, pogotovo rješenja u gornjem lijevom uglu slike gdje su prirodne frekvencije ovještene mase niske, što je najvjerojatnije posljedica tvrdog ograničenja vremena simulacije (vidi prethodni odjeljak). Na 2D dijagramu gdje je treća os dana u boji, uspoređivanjem položaja na slici i boje Pareto optimalnih rezultata s LQ rezultatima zaključujemo da su Pareto optimalni rezultati, dobiveni optimizacijom, vrlo slični LQ rezultatima.

Dakle, i kod modela s dva stupnja slobode gibanja više-kriterijsko optimiranje pojačanja regulatora daje optimalni regulator. Međutim, bitno je napomenuti da je osim preliminarne analize, kojom se nastoji postići što veći postotak valjanih rješenja u konačnim rješenjima, vrlo važna početna populacija dizajnova. Može se dogoditi da, ukoliko ne pokrijemo dovoljno široki prostor mogućih rješenja, algoritam veliki broj rješenja koncentrira na malom području.



Slika 22. Usporedba Pareto optimalnih rezultata dobivenih optimizacijom u MF (plavi puni krugovi) i LQ rezultata (siva površina) na 3D dijagramu, s linijama za lakše orijentiranje, za model s dva stupnja slobode gibanja



Slika 23. Usporedba Pareto optimalnih rezultata dobivenih optimizacijom u MF (gore) i LQ rezultata (dolje), s linijama za lakše orijentiranje, za model s dva stupnja slobode gibanja

4. SUSTAV REGULACIJE POLUAKTIVNOG OVJESA

Poluaktivni ovjesi s promjenjivim, upravljivim koeficijentom prigušenja spominju se gotovo 50 godina. Prvu ideju o "aktivnom amortizeru" dao je Karnopp [37], a u njegovom konceptu amortizer mijenja koeficijent prigušenja na način da reproducira silu, kada god je to moguće, kakvu bi davao amortizer postavljen između ovještene mase i "neba". Naziv za takvu strategiju upravljanja poluaktivnim ovjesom je *Skyhook* upravljanje i danas je to najšire primjenjena strategija upravljanja poluaktivnim ovjesom [5, 8]. Prve verzije *Skyhook* upravljanja mijenjale su koeficijent prigušenja između minimalne i maksimalne vrijednosti, ovisno o predznaku umnoška vertikalne brzine ovještene mase i relativne brzine između ovještene i neovještene mase [5, 6]. Moderni poluaktivni ovjesi sastoje se od opruge i amortizera s kontinuirano promjenjivim koeficijentom prigušenja. Ukoliko logiku *Skyhook* upravljanja primijenimo na amortizeru s kontinuirano promjenjivim koeficijentom prigušenja dobivamo tzv. "odrezano" upravljanje (eng. *clipped control*) [3, 5, 6]. Naime, amortizer će kontinuirano mijenjati svoj koeficijent prigušenja i reproducirati traženu silu dokle god podliježe ograničenju pasivnosti. Kada je tražena sila aktivna, stvarni amortizer "reže" silu (odatle i naziv *clipped*) jer je ne može reproducirati. Osim navedene dvije strategije, pravci razvoja idu prema naprednijim strategijama poput MPC, primjeni *fuzzy* i nelinearnih regulatora te strategijama koje koriste minimalan broj senzora [5].

4.1. Optimalna "odrezana" regulacija poluaktivnog ovjesa

Sustav regulacije poluaktivnim ovjesom koji se temelji na praćenju optimalne aktivne sile kada je ona disipativna nazvan je optimalna "odrezana" regulacija (eng. *clipped-optimal*) [3, 6]. Optimalna aktivna sila dana je optimalnim upravljačkim zakonom aktivnog ovjesa, a zatim se primjenjuje ograničenje pasivnosti na izlazu regulatora. Ukoliko korišteni amortizer s kontinuirano promjenjivim koeficijentom prigušenja nema ograničenja, primjena ovakvog sustava regulacije rezultira silom prigušenja jednakoju nuli kada se zahtjeva motorni režim i optimalnom aktivnom silom kada se zahtjeva disipativni režim. U [38] pokazano je da je optimalni zakon upravljanja poluaktivnim ovjesom nužno vremenski varijantan, a u [39] je pokazano da je optimalna "odrezana" regulacija podoptimalna ali da rezultira performansama vrlo bliskim optimalnom, vremenski varijantnom rješenju. Isti zaključci su dobiveni i korištenjem modelsko-prediktivnim upravljanjem u [25]. Iako je ovaj sustav regulacije podoptimalan, ovdje je korišten zbog jednostavnosti implementacije jer je optimalni upravljački zakon za aktivni ovjes izveden u poglavlju 3.

Model poluaktivnog ovjesa sa sustavom optimalne "odrezane" regulacije je nelinearan zbog ograničenja pasivnosti koje je za modele sa slike 3 definirano kao:

$$U(x_4 - x_2) \geq 0 \quad (4.1)$$

Jedan od načina modeliranja u tom slučaju je model u obliku bilinearnog prostora stanja [38, 39]. Međutim, kako je pokazano u 3. poglavlju vrlo precizne rezultate je moguće dobiti korištenjem simulacijskih modela stoga je u ovom radu model poluaktivnog ovjesa izrađen u Simulink-u te su sve analize vezane uz poluaktivni ovjes temeljene na tom modelu.

4.2. Performanse poluaktivnog ovjesa u odnosu na aktivni ovjes

Analiza kovarijanci ne daje cijelu sliku o performansama ovjesa. Stoga je, osim analize kovarijanci, u ovom potpoglavlju dana i analiza u frekvencijskoj domeni na temelju amplitudno-frekvencijskih karakteristika (AFK) i u vremenskoj domeni na temelju simulacijskih odziva jer je smanjen broj podešenja koje ulaze u razmatranje. Naime, analiza kovarijanci jednostavno podnosi veliki broj podešenja ovjesa jer su performanse predstavljene jednim brojem (normiranom RMS vrijednosti izlazne varijable) po podešenju, ali analize u frekvencijskoj i vremenskoj domeni rezultiraju jednom krivuljom po podešenju. Stoga je vrlo teško analizirati sve kombinacije podešenja ovjesa i potrebno je izabrati nekoliko postavki.

Na temelju analize dane u potpoglavlju 3.3 doneseni su zaključci koji gotovo beskonačan broj podešenja ovjesa smanjuju i usmjeravaju prema smislenim i praktičnim podešenjima. Dvije glavne smjernice potpoglavlja 3.3 su: i) omjer težinskih koeficijenata r_1/r_2 ne treba prelaziti 1000 i dobar kompromis između konfliktnih kriterija postiže se s $r_1/r_2=10$ (prema slici 20, ovim omjerom dobivamo gotovo jednaku upravljivost a puno bolji hod ovjesa nego s omjerom $r_1/r_2=100$), ii) vrijeme unaprijednog poznavanja profila ceste od 500 ms je dovoljno da bi se postigla značajna poboljšanja performansi aktivnog ovjesa za većinu podešenja. Analiza performansi poluaktivnog ovjesa temelji se na navedene dvije činjenice i izabrano je šest podešenja, prikazanih u tablici 2. Osim težinskih koeficijenata, u tablici su prikazani iznosi relativnog koeficijenta prigušenja neovještene mase ζ_{us} , prirodne frekvencije neovještene mase $\omega_{n,us}$, relativnog koeficijenta prigušenja ovještene mase ζ_s i prirodne frekvencije ovještene mase $\omega_{n,s}$ odgovarajućih podešenja i pasivnog ovjesa koji nisu detaljnije razmatrani u potpoglavlju 3.3. Podešenja ovjesa koja rezultiraju malim normiranim RMS vrijednostima ubrzanja ovještene mase i većim deformacijama pneumatika (označena sa S1, S2 i S3) okarakterizirana su iznimno malim relativnim koeficijentom prigušenja neovještene mase i vrlo niskim prirodnim

frekvencijama ovještene mase te vrlo dobrim prigušenjem ovještene mase ($\sim 0,7$) koje je veće nego kod pasivnog ovjesa. Podešenja ovjesa koja rezultiraju manjom udobnosti vožnje i boljom upravljivosti (S4, S5 i S6) okarakterizirana su većim iznosima prigušenja neovještene mase i višim prirodnim frekvencijama ovještene mase no relativni koeficijent prigušenja ovještene mase je nešto manji nego kod prethodnih postavki, ali još uvijek više od dvostruko veći nego kod pasivnog ovjesa. Kod "tvrđih" postavki (S5 i S6) prirodna frekvencija neovještene mase vrlo naglo raste i veća je nego kod pasivnog vozila.

Tablica 2. Podešenja aktivnog ovjesa pri analizi poluaktivnog ovjesa

Pod.	r_1	r_2	ζ_{us}	$\omega_{n,us}$ [rad/s]	ζ_s	$\omega_{n,s}$ [rad/s]
S1	10	1	0.0042	62.8	0.706	1
S2	10^2	10	0.0133	62.8	0.704	1.78
S3	10^3	10^2	0.0419	62.9	0.698	3.16
S4	10^4	10^3	0.13	63.9	0.679	5.53
S5	10^5	10^4	0.344	71.8	0.632	8.75
S6	10^6	10^5	0.571	106	0.589	10.5
P	/	/	0.296	65	0.262	6.11

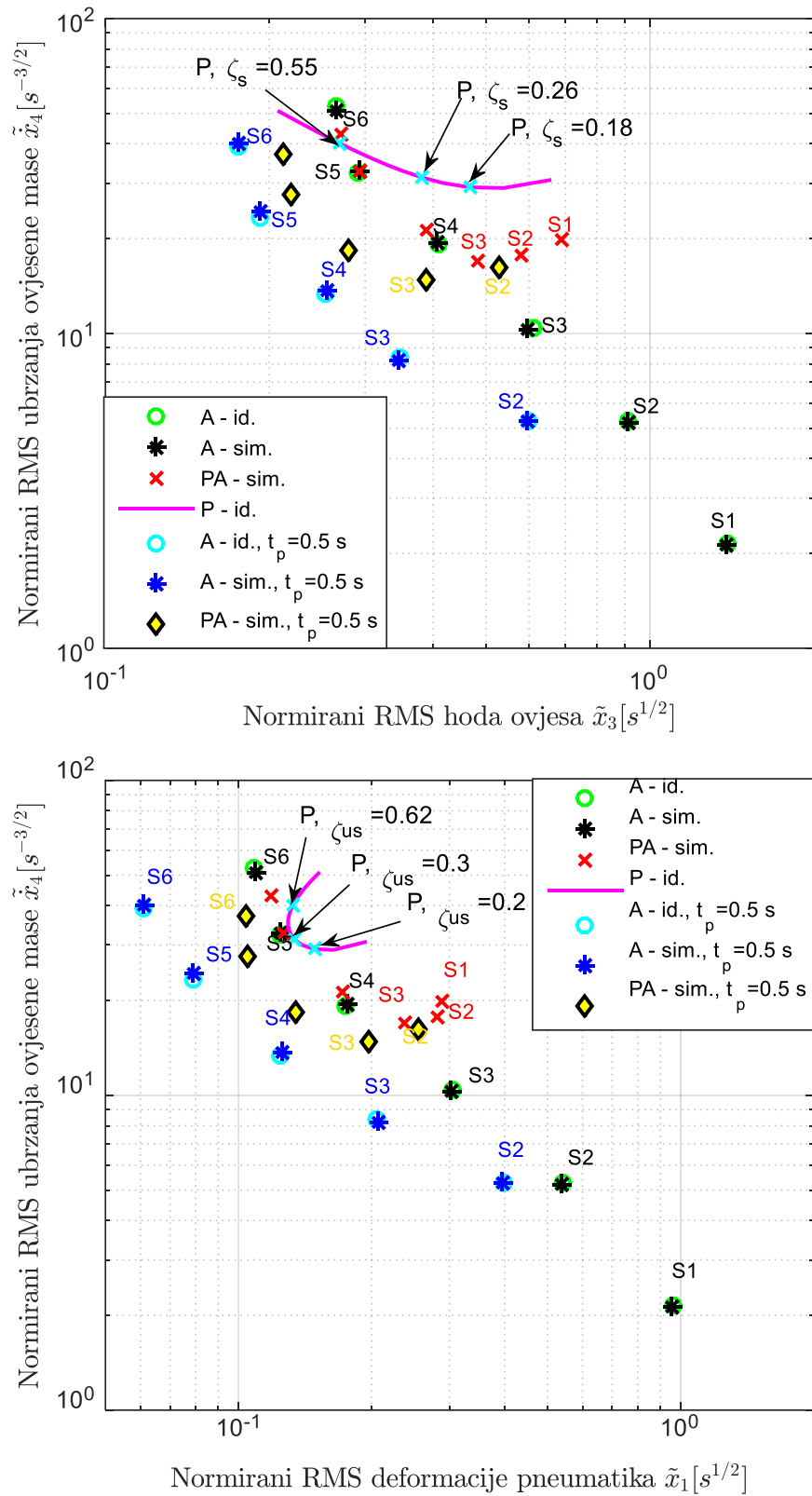
Prikazanih šest postavki koristi se za dobivanje upravljačkog zakona aktivnim ovjesom koji se primjenjuje u optimalnom "odrezanom" sustavu regulacije poluaktivnim ovjesom. Prilikom korištenja poluaktivnog ovjesa nužno je koristiti oprugu koja preuzima težinu vozila. Stoga je pri dobivanju pojačanja optimalnog regulatora potrebno koristiti model (2.6) i težinske matrice definirane izrazom (3.77), a korištena je ista opruga kao i kod pasivnog ovjesa. Također, postavljena su ograničenja na koeficijent prigušenja poluaktivnog ovjesa, gdje je maksimalno moguće prigušenje postavljeno na $b_{s,max} = 5000$ Ns/m a minimalno na $b_{s,min} = 250$ Ns/m (postavljanje niskog donjeg limita vrlo malo utječe na performanse, a bliže je stvarnim karakteristikama poluaktivnog ovjesa). Ograničenja maksimalne sile prigušenja i maksimalne disipativne snage poluaktivnog ovjesa, kao ni maksimalna sila aktuatora aktivnog ovjesa te dinamika aktuatora (aktivnog i poluaktivnog) ovdje nisu uključene.

4.2.1. Analiza kovarijanci za sustav regulacije aktivnog i poluaktivnog ovjesa

Kao što je bilo spomenuto ranije, za analizu poluaktivnog ovjesa koristi se simulacijski model implementiran u Simulink-u. Procedura za dobivanje normiranih RMS vrijednosti izlaznih varijabli jednaka je opisanoj proceduri u odjeljku 3.2.2. Za postizanje najveće moguće preciznosti, istovremeno se simuliraju model punog aktivnog ovjesa i poluaktivnog ovjesa. Kod aktivnog i poluaktivnog ovjesa sa unaprijednim regulacijskim djelovanjem po budućem profilu ceste korištene su postavke ovjesa S2-S6 prema tablici 2.

Slika 24 prikazuje kompromis između udobnosti i hoda ovjesa (gore) te udobnosti i upravljivosti (dolje) za poluaktivni ovjes (crveni križići) i poluaktivni ovjes s unaprijednim regulacijskim djelovanjem (žuti dijamanti) u odnosu na aktivni ovjes (crne točke) i aktivni ovjes s unaprijednim regulacijskim djelovanjem (plave točke). Ujedno su za aktivne ovjese dane i idealne vrijednosti dobivene numeričkom analizom kovarijanci (zeleni i svijetloplavi krugovi). Prvo što možemo primjetiti je da poluaktivni ovjes za podešenja S1, S2 i S3 rezultira velikim pogoršanjem performansi u odnosu na aktivni ovjes, dok za podešenja S4, S5 i S6 rezultira sličnim performansama kao i aktivni ovjes. Razlozi pogoršanja performansi su prisutnost paralelno postavljenje opruge i mali relativni koeficijent prigušenja neovještene mase (što je rel. koef. prigušenja manji pogoršanje je veće). Zbog malog relativnog koeficijenta prigušenja neovještene mase tražena sila je često takva da se zahtijeva motorski režim kako bi se poništilo djelovanje paralelne opruge a takvu silu poluaktivni ovjes ne može isporučiti. S druge strane, kod postavki S4, S5 i S6, kod kojih je relativni koeficijent prigušenja neovještene mase veći, aktivna sila je češće disipativna i poluaktivni ovjes je može ostvariti. Kod sustava s unaprijednim regulacijskim djelovanjem performanse poluaktivnog ovjesa su za sva podešenja lošija od aktivnog ovjesa iz vrlo jednostavnog razloga. Aktivni ovjes s unaprijednim regulacijskim djelovanjem počinje djelovati ranije striktno u motorskom režimu (vidi simulacijske rezultate) i poluaktivni ovjes to ne može ni u kojem slučaju ostvariti. Međutim, zanimljivo je da poluaktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem rezultira nešto boljim performansama od aktivnog ovjesa bez unaprijednog djelovanja za "tvrđa" podešenja S4, S5 i S6. Na primjer, za podešenje koje ima jednaku upravljivost kao i pasivni ovjes ($P, \zeta_{us}=0.3$) aktivni ovjes bez unaprijednog djelovanja rezultira sa 10 % boljom udobnosti vožnje, dok poluaktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem (S4) rezultira sa čak ~40 % boljom udobnosti vožnje u odnosu na pasivno vozilo. Ljubičasta linija prikazuje performanse pasivnog ovjesa

kojem je koeficijent prigušenja amortizera mijenjan kako bi se dobio uvid koliko je poluaktivni ovjes bolji od mogućih pasivnih ovjesa uz korištenje iste opruge.



Slika 24. Performanse poluaktivnog ovjesa s i bez unaprijednog unaprijednog regulacijskog djelovanja po budućem profilu ceste u odnosu na aktivne ovjese

4.2.2. Usporedna analiza kvalitete regulacije u frekvencijskoj domeni

Dok analiza kovarijanci daje standardnu devijaciju izlaznih varijabli aktivnog ovjesa, amplitudno frekvencijska karakteristika daje podatak koliko je pojačanje (prigušenje) promatrane izlazne varijable u odnosu na ulaznu varijablu pri određenoj frekvenciji sinusne pobude. Amplitudno-frekvencijske karakteristike su vrlo važan alat i komplement analizi kovarijanci upravo iz razloga što omogućavaju analiziranje prigušenja ovjesa i određivanje frekvencijskog područja u kojem ovjes ima najveće prigušenje vibracija. U ovom su poglavlju analizirane amplitudno-frekvencijske karakteristike ubrzanja ovješene mase \dot{x}_4 , deformacije pneumatika x_1 i hoda ovjesa x_3 s obzirom na brzinu podloge ceste w , tj. sljedeće tri prijenosne funkcije:

$$G_{\dot{x}_4}(\omega) = \frac{\dot{x}_4}{w} \quad (4.2)$$

$$G_{x_1}(\omega) = \frac{x_1}{w} \quad (4.3)$$

$$G_{x_3}(\omega) = \frac{x_3}{w} \quad (4.4)$$

Dobivanje amplitudno-frekvencijskih karakteristika linearnih sustava je vrlo jednostavno pošto se relativno lako izračuna prijenosna funkcija između izlazne i ulazne varijable i odredi frekvencijski odziv (dobiva se Bode dijagram). Kod nelinearnih sustava nije moguće odrediti prijenosnu funkciju pa se amplitudno-frekvencijska karakteristika estimira. Jedan od načina estimacije, koji je korišten u ovom radu, sastoji se od pobuđivanja sustava sinusnom pobudom stalne frekvencije i određivanja omjera brze Fourierove transformacije (FFT, eng. *Fast-Fourier Transform*) izlazne i ulazne varijable u stacionarnom stanju [5, 40]. Pobuda sustava treba trajati dovoljno dugo (dovoljan broj perioda) da sustav prijeđe tranzijentno stanje i uđe u stacionarno stanje. U stacionarnom stanju uzimamo npr. zadnjih 10 perioda za estimaciju frekvencijskog odziva. Međutim, treba biti oprezan pri radu s nelinearnim sustavima te bi amplituda pobude trebala biti pažljivo izabrana kako sustav nebi ušao u zasićenja. U MATLAB/Simulink-u opisani postupak je automatiziran u naredbi *frestimate*.

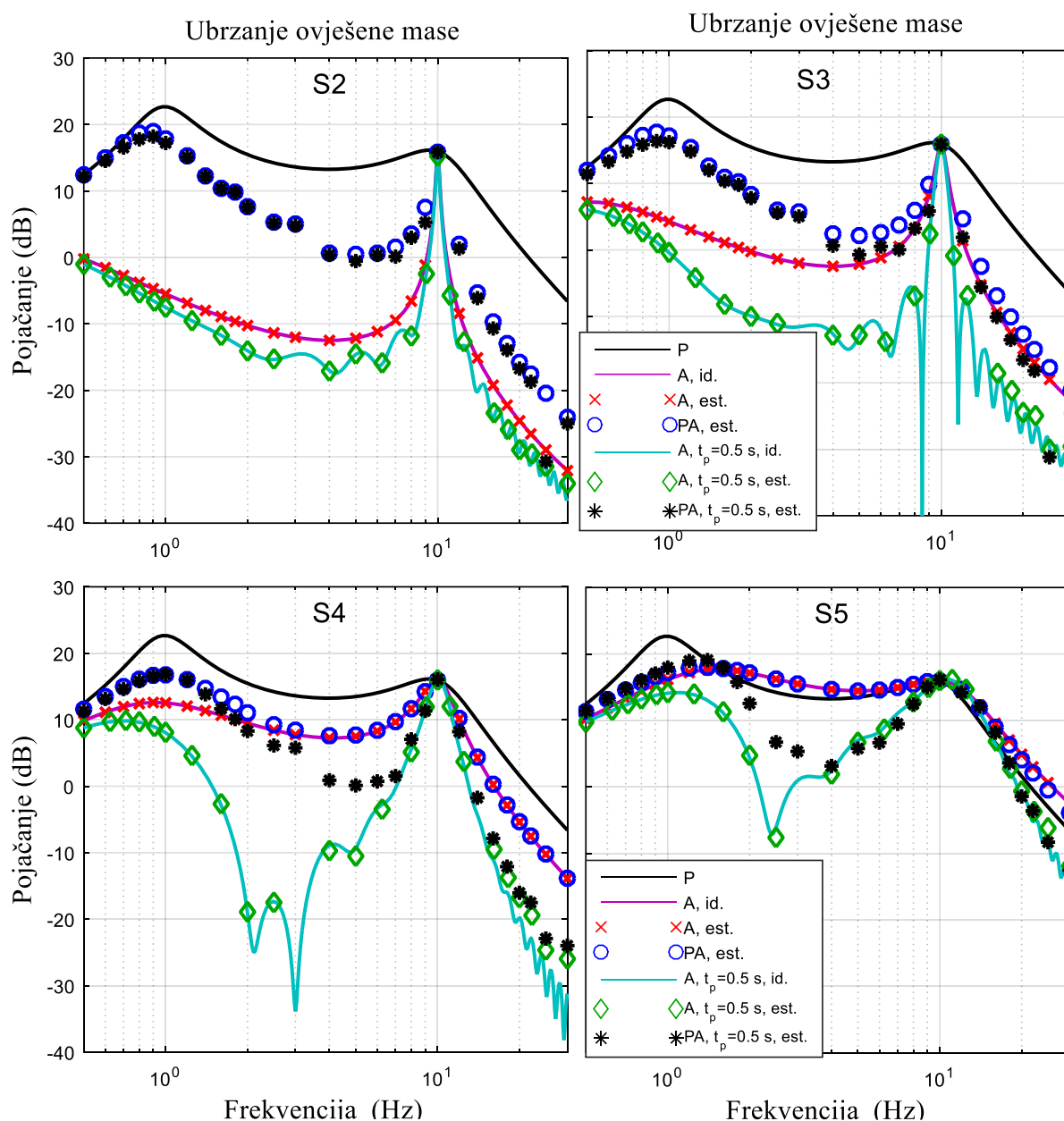
Na temelju kovarijantne analize dane u prethodnom odjeljku odabrana su četiri podešenja aktivnog ovjesa za daljnju analizu: S2, S3, S4 i S5. Amplitudno-frekvencijske karakteristike ubrzanja ovješene mase prikazane su na slici 25. Za sva četiri podešenja aktivni ovjes s unaprijednim regulacijskim djelovanjem (zelena linija odgovara linearnom Bode

dijagramu, zeleni dijamanti odgovaraju simulacijskoj provjeri tj. estimaciji) rezultira najvećim prigušenjem ubrzanja ovještene mase na svim frekvencijama, osim na prirodnoj frekvenciji neovještene mase koja je invarijantna točka prijenosne funkcije (4.2) [41]. Na toj frekvenciji sva podešenja imaju isto prigušenje ubrzanja ovještene mase. Za mekša podešenja, koja imaju veliko prigušenje ubrzanja ovještene mase u srednjem području frekvencija, to znači da imaju vrlo izražen rezonantni vrh na prirodnoj frekvenciji neovještene mase (ovdje 10 Hz). Najveća prigušenja aktivnog ovjesa s unaprijednim djelovanjem su u području frekvencija od 2 do 8 Hz za S2 i S3, tj. ~2 Hz do ~6 Hz za S4 i S5 što odgovara području frekvencija u kojem je čovjek najosjetljiviji na vertikalne vibracije (vidi 3.1.3.1). Radi ilustracije, za podešenje S4 razlika u prigušenju u odnosu na pasivni ovjes je ~25 dB (~18 puta) na frekvenciji 5 Hz. Pri mekšim podešenjima, S2 i S3, aktivni ovjes (ljubičasta linija odgovara linearnom Bode dijagramu, crveni križići estimaciji) rezultira većom udobnosti vožnje (veće prigušenje) u odnosu na poluaktivne ovjese (plavi kružići i crne zvijezde) te u odnosu na pasivni ovjes (crna linija) na svim frekvencijama. Oba poluaktivna ovjesa (s i bez unaprijednog djelovanja) za mekša podešenja imaju slične karakteristike koje su kvalitetnije od karakteristike pasivnog ovjesa. Poluaktivni ovjesi, kao i pasivni ovjes, imaju izražen rezonantni vrh i na prirodnoj frekvenciji ovještene mase (~ 1 Hz).

Za podešenje S4 karakteristika poluaktivnog ovjesa (plavi kružići) je lošija u nisko-frekvencijskom području, oko rezonantne frekvencije ovještene mase, od karakteristike aktivnog ovjesa ali je gotovo jednaka karakteristici aktivnog ovjesa u srednje- (iznad 3 Hz) i visoko-frekvencijskom području. Također, za podešenje S5 jednaka je karakteristici aktivnog ovjesa na svim frekvencijama, što je u skladu s rezultatima kovarijantne analize. Kovarijantna je analiza pokazala da je za podešenja S4 i S5 poluaktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem (ovdje crne zvijezde) nešto bolji od aktivnog ovjesa bez unaprijednog djelovanja po kriteriju udobnosti vožnje. Frekvencijske karakteristike pokazuju da poluaktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem za ta dva podešenja rezultira većom udobnosti vožnje od aktivnog ovjesa u području srednjih (najznačajnijih) i visokih frekvencija, dok pri niskim frekvencijama aktivni ovjes ipak ima bolje prigušenje. Zanimljiva je i činjenica da za vrlo tvrdi ovjes (podešenje S5) poluaktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem na frekvencijama iznad 4 Hz ima performanse gotovo jednake aktivnom ovjesu s unaprijednim djelovanjem.

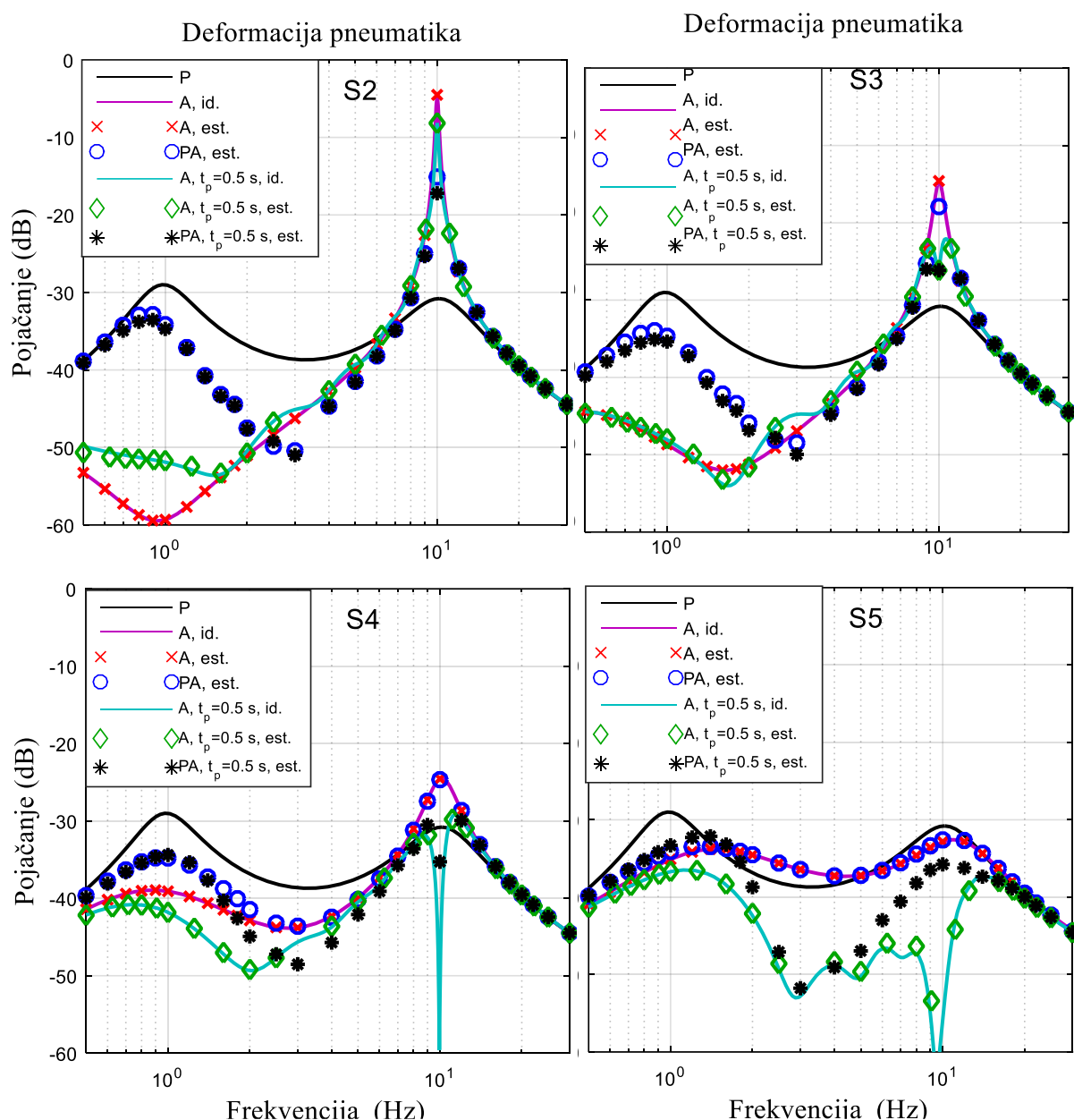
Amplitudno-frekvencijske karakteristike deformacije pneumatika, koje reflektiraju upravljivost, prikazane su na slici 26. Prvo što možemo primjetiti je da pasivni ovjes opet ima dva rezonantna vrha na prirodnim frekvencijama ovještene i neovještene mase, koje također ima i poluaktivni ovjes bez unaprijednog djelovanja. Međutim, kod aktivnog ovjesa i poluaktivnog

ovjesa bez unaprijednog djelovanja rezonantni vrh na prirodnoj frekvenciji neovještene mase je vrlo visok za mekša podešenja te se snižava kako se povećava relativni koeficijent prigušenja neovještene mase tj. kako se mičemo prema tvrdim podešenjima S4 i S5. Na srednjim i visokim frekvencijama poluaktivni ovjes ima gotovo jednaku upravljivost kao i aktivni ovjes, ali je na niskim frekvencijama upravljivost poluaktivnog ovjesa primjetno lošija od aktivnog (osim za S5).



Slika 25. Amplitudno-frekvencijska karakteristika prijenosne funkcije ubrzanja ovještene mase s obzirom na brzinu profila ceste za postavke ovjesa S2, S3, S4 i S5, za pasivni ovjes (P); aktivni ovjes teorijska (A,id.) i estimirana (A, est.); poluaktivni ovjes estimirana (PA, est.); aktivni ovjes s 500 ms unaprijednog poznavanja profila ceste teorijska (A, $t_p = 0.5$ s, id.) i estimirana (A, $t_p = 0.5$ s, est.); poluaktivni ovjes s 500 ms unaprijednog poznavanja profila ceste estimirana (PA, $t_p = 0.5$ s, est.)

Aktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem rezultira najboljom upravljivosti na niskim i srednjim frekvencijama dok je njegovo ponašanje u blizini prirodne frekvencije neovještene mase specifično. Naime, kako se pomičemo tvrdim ovjesima (S2→S5), na prirodnoj frekvenciji neovještene mase javlja se efekt pojase brane (eng. *notch filter*) koja je sve dublja što je ovjes tvrdi te rezultira karakteristikom kakva se dobiva korištenjem masenog (seizmičkog) prigušivača (tzv. dinamičkog absorbera, vidi [3, 17]).



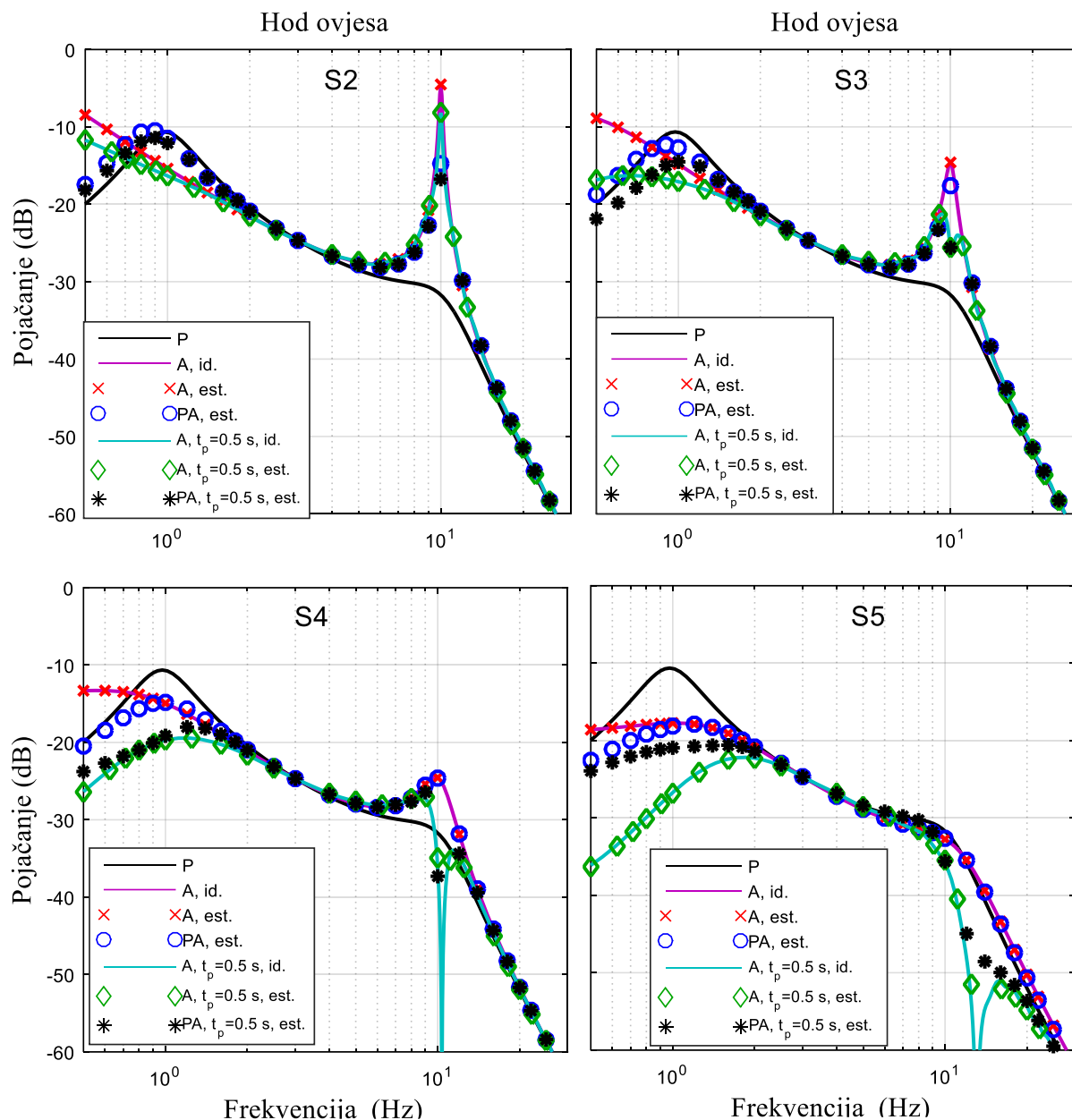
Slika 26. Amplitudno-frekvencijska karakteristika prijenosne funkcije deformacije pneumatika s obzirom na brzinu profila ceste za postavke ovjesa S2, S3, S4 i S5, za pasivni ovjes (P); aktivni ovjes teorijska (A,id.) i estimirana (A, est.); poluaktivni ovjes estimirana (PA, est.); aktivni ovjes s 500 ms unaprijednog poznavanja profila ceste teorijska (A, $t_p = 0.5$ s, id.) i estimirana (A, $t_p = 0.5$ s, est.); poluaktivni ovjes s 500 ms unaprijednog poznavanja profila ceste estimirana (PA, $t_p = 0.5$ s, est.)

Prednost dinamičkog absorbera je što mijenja strukturu ovjesa i gubi se invarijantna točka na prirodnoj frekvenciji neovještene mase u prijenosnoj funkciji ubrzanja ovještene mase. Samim time se pojasna brana pojavljuje i u amplitudno frekvencijskoj karakteristici ubrzanja ovještene mase, što nije slučaj s unaprijednim regulacijskim djelovanjem po budućem profilu ceste.

Pojavljivanje pojasne brane je izravna posljedica unaprijednog poznavanja profila ceste te je dubina brane izravno povezana s vektorom pojačanja \mathbf{K}_2 i vremenom unaprijednog poznavanja profila ceste t_p . Kako je bilo objašnjeno u odjeljku 3.3.2, postoji granica vremena t_p na kojoj su pojačanja \mathbf{K}_2 vrlo blizu nule, tj. na kojoj dolazi do zasićenja u poboljšanjima performansi. Također je bilo pokazano da je ta granica izravno povezana s prirodnom frekvencijom ovještene mase tj. što je prirodna frekvencija ovještene mase veća potrebno vrijeme t_p da dođe do zasićenja performansi je kraće. Za podešenja S2 i S3 vrijeme unaprijednog poznavanja profila ceste od 500 ms je prekratko da bi došlo do zasićenja performansi, dok je za podešenje S5 dovoljno. Stoga pojasne brane kod podešenja S2 gotovo da nema, kod S3 se počinje formirati, kod S4 se vrlo jasno vidi, dok se kod S5 brana proširila i prema srednjim frekvencijama. Ukoliko bi povećali vrijeme unaprijednog poznavanja profila ceste, upravljivost podešenja S2, S3 i S4 bi se povećala. Ovdje također, za tvrđa podešenja (S4 i S5), performanse poluaktivnog ovjesa s unaprijednim djelovanjem nadmašuju performanse aktivnog ovjesa bez unaprijednog djelovanja u području srednjih i viših frekvencija, pogotovo na prirodnoj frekvenciji neovještene mase zbog spomenute pojasne brane. Međutim, na nižim frekvencijama, pogotovo na prirodnoj frekvenciji ovještene mase, aktivni ovjes ima bolju upravljivost od poluaktivnog ovjesa s unaprijednim djelovanjem.

Konačno, na slici 27 prikazane su amplitudno-frekvencijske karakteristike hoda ovjesa. Svi tipovi ovjesa imaju jednako prigušenje na frekvenciji ~ 3 Hz koja je invarijantna točka prijenosne funkcije (4.4) [41]. Pasivni ovjes ima vrlo izražen rezonantni vrh na prirodnoj frekvenciji ovještene mase, dok aktivni i poluaktivni ovjesi imaju izražen rezonantni vrh na prirodnoj frekvenciji neovještene mase koji se smanjuje pomicanjem prema tvrđim ovjesima. Aktivni ovjesi te tvrđi poluaktivni ovjesi (S4 i S5) imaju bolje prigušenje hoda ovjesa u okolini prirodne frekvencije ovještene mase, a najbolje prigušenje u tom području ima aktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem, pogotovo za postavke S4 i S5. U području srednjih frekvencija sve su karakteristike približno jednake. Ovdje se također pojavljuje pojasna brana kod ovjesa s unaprijednim djelovanjem s istim značajkama kao i kod deformacije pneumatika. Zanimljivo je ponašanje aktivnog ovjesa bez unaprijednog djelovanja na vrlo niskim frekvencijama (ispod 1 Hz), gdje se može primjetiti da pojačanje ne opada sa smanjenjem frekvencije, kao što je

slučaj kod drugih ovjesa, već raste (S2, S3) ili ostaje približno jednako (S4 i S5). Ovakvo ponašanje nije poželjno jer pri pobudama vrlo niskih frekvencija, kao što su brda, povišeni mostovi i slično, želimo pratiti profil ceste. U suprotnom bi vrlo lako moglo doći do iznimno velikih hodova ovjesa te udaranja u graničnike. Kod implementacije aktivnog ovjesa signali se mogu filtrirati visokopropusnim filterom koji će prigušiti vrlo niske frekvencije te ovakvo ponašanje aktivnog ovjesa u tom slučaju nije kritično.

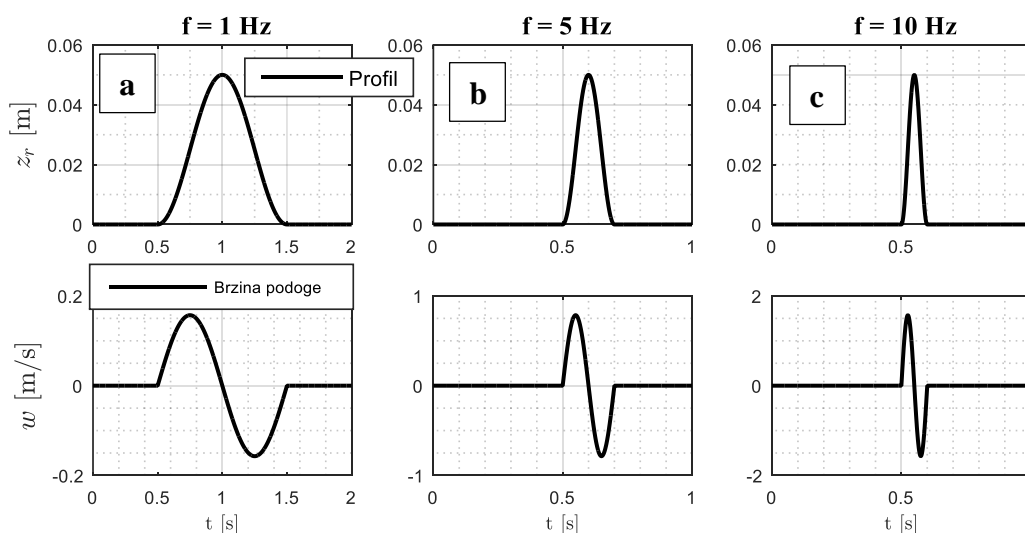


Slika 27. Amplitudno-frekvencijska karakteristika prijenosne funkcije hoda ovjesa s obzirom na brzinu profila ceste za postavke ovjesa S2, S3, S4 i S5, za pasivni ovjes (P); aktivni ovjes teorijska (A, id.) i estimirana (A, est.); poluaktivni ovjes estimirana (PA, est.); aktivni ovjes s 500 ms unaprijednog poznavanja profila ceste teorijska (A, $t_p = 0.5$ s, id.) i estimirana (A, $t_p = 0.5$ s, est.); poluaktivni ovjes s 500 ms unaprijednog poznavanja profila ceste estimirana (PA, $t_p = 0.5$ s, est.)

4.2.3. Usporedna analiza kvalitete regulacije u vremenskoj domeni

Usporedna analiza u vremenskoj domeni teško je izvediva za sva podešenja ovjesa jer broj grafova koje bi bilo potrebno analizirati raste s brojem podešenja, pa je broj podešenja poželjno smanjiti. Stoga, na temelju analize u frekvencijskoj domeni, za daljnju su analizu odabrane postavke S3, S4 i S5 koje imaju zadovoljavajuće performanse aktivnih i poluaktivnih sustava regulacije. Ono što analiza u frekvencijskoj domeni ne pokazuje je kako se u vremenu ponašaju deformacija pneumatika, hod ovjesa i ubrzanje ovješene mase pri nailasku na nepravilnosti ceste, već samo daje informaciju o mogućem poboljšanju na određenoj frekvenciji. Upravo iz tog razloga je poželjno analizirati sustav u vremenskoj domeni koja nam može dati dodatne uvide u ponašanje sustava, pogotovo u ponašanje sustava s unaprijednim regulacijskim te dati uvid u utjecaj relativnog koeficijenta prigušenja primarno neovješene mase.

Za analizu u vremenskoj domeni generirana su tri različita, deterministička profila ceste koji su prikazani na slici 28. Profili su generirani pomoću kosinusnog modela izbočine danog u odjeljku 2.2.2, gdje je odabrana visina profila $h = 5$ cm, uzdužna brzina vozila $V = 36$ km/h (10 m/s) te je odabrana duljina izbočine za profil a) jednaka $L=10$ m, b) $L=2$ m, c) $L=1$ m. Na taj način dobivamo frekvenciju brzine podloge w koja je pod a) $f=1$ Hz, tj. jednaka prirodnoj frekvenciji ovješene mase, b) $f=5$ Hz, tj. frekvencija iz srednjeg područja frekvencija koja je neugodna za ljude, c) $f=10$ Hz, tj. prirodna frekvencija neovješene mase.



Slika 28. Izbočina generirana pomoću kosinusnog modela, visine 5 cm s frekvencijom pobude:
a) 1 Hz, b) 5 Hz, c) 10 Hz

4.2.3.1 Pobuda na prirodnoj frekvenciji ovješene mase

Prvi razmatrani scenarij uključuje izbočinu koja ima frekvenciju pobude jednaku prirodnoj frekvenciji ovješene mase, tj. $f = 1$ Hz. Prema frekvencijskim karakteristikama prikazanim u prethodnom odjeljku, pasivni ovjes ima najmanje prigušenje (najveće pojačanje) na prirodnoj frekvenciji ovješene mase i svi aktivni i poluaktivni ovjesi imaju bolje prigušenje u sve tri frekvencijske karakteristike. Standardne devijacije snimljenih odziva u vremenskoj domeni, dane u tablici 3, potvrđuju navedenu tvrdnju. Aktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem (A,p) rezultira najvećim smanjenjem ubrzanja ovješene mase (najveća udobnost vožnje) od čak 86,5 % u slučaju postavke S3 a najmanje 55,5 % u slučaju postavke S5 koja karakterizira tvrdi ovjes orijentiran upravljivosti. Aktivni ovjes bez unaprijednog djelovanja je po standardnim devijacijama blizu aktivnog ovjesa s unaprijednim djelovanjem, a oba poluaktivna ovjesa rezultiraju sličnim performansama koje su bolje od pasivnog ovjesa ali lošije od aktivnih ovjesa.

Međutim, simulacijski rezultati prikazani na slici 29, za postavku S3, prvo ukazuju na posljedicu niskog relativnog koeficijenta prigušenja neovješene mase koji za postavku S3 iznosi samo 4%. Naime, zbog niskog relativnog koeficijenta prigušenja dolazi do pojave oscilacija u deformaciji pneumatika (vidi detalj na slici) za sve tipove ovjesa. Osim oscilacija, posljedica niskog relativnog koeficijenta prigušenja neovješene mase je da regulator češće zahtijeva motorsku silu koju poluaktivni ovjesi ne mogu reproducirati (vidi detalj na slici) što rezultira većim ubrzanjima ovješene mase i većim deformacijama pneumatika u odnosu na aktivne ovjese. No, maksimalni iznosi ubrzanja ovješene mase i deformacije pneumatika poluaktivnih ovjesa (crvena crtkana i crna točkasta linija) su još uvijek ispod maksimalnih iznosa pasivnog ovjesa (ljubičasta linija), dok najmanje iznose postižu aktivni ovjesi (plava i zelena linija). Unatoč niskom relativnom koeficijentu prigušenja neovješene mase, ubrzanje ovješene mase i deformacija pneumatika brže se smiruju u nuli nego odzivi pasivnog ovjesa. Također, hod ovjesa aktivnih i poluaktivnih ovjesa brže se smiruje u nuli nego hod pasivnog ovjesa zbog visokog relativnog koeficijenta prigušenja ovješene mase (~70%).

Kod postavke S4, koja ima viši relativni koeficijent prigušenja neovješene mase (13%), možemo primjetiti bitno manje oscilacija u deformaciji pneumatika u odnosu na S3. Postavka S4 predstavlja tvrdi ovjes od postavke S3 i prethodne su dvije analize pokazale da su razlike između performansi poluaktivnih i aktivnih ovjesa za ovu postavku manje nego kod postavke S3. Slično primjećujemo i ovdje, poluaktivni ovjesi se približavaju performansama aktivnih ovjesa no razlika je još uvijek značajna. Poluaktivni i aktivni ovjesi su po svim kriterijima bolji

od pasivnog ovjesa (niže standardne devijacije i niži maksimalni iznosi) te aktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem još uvijek pruža najveća poboljšanja performansi.

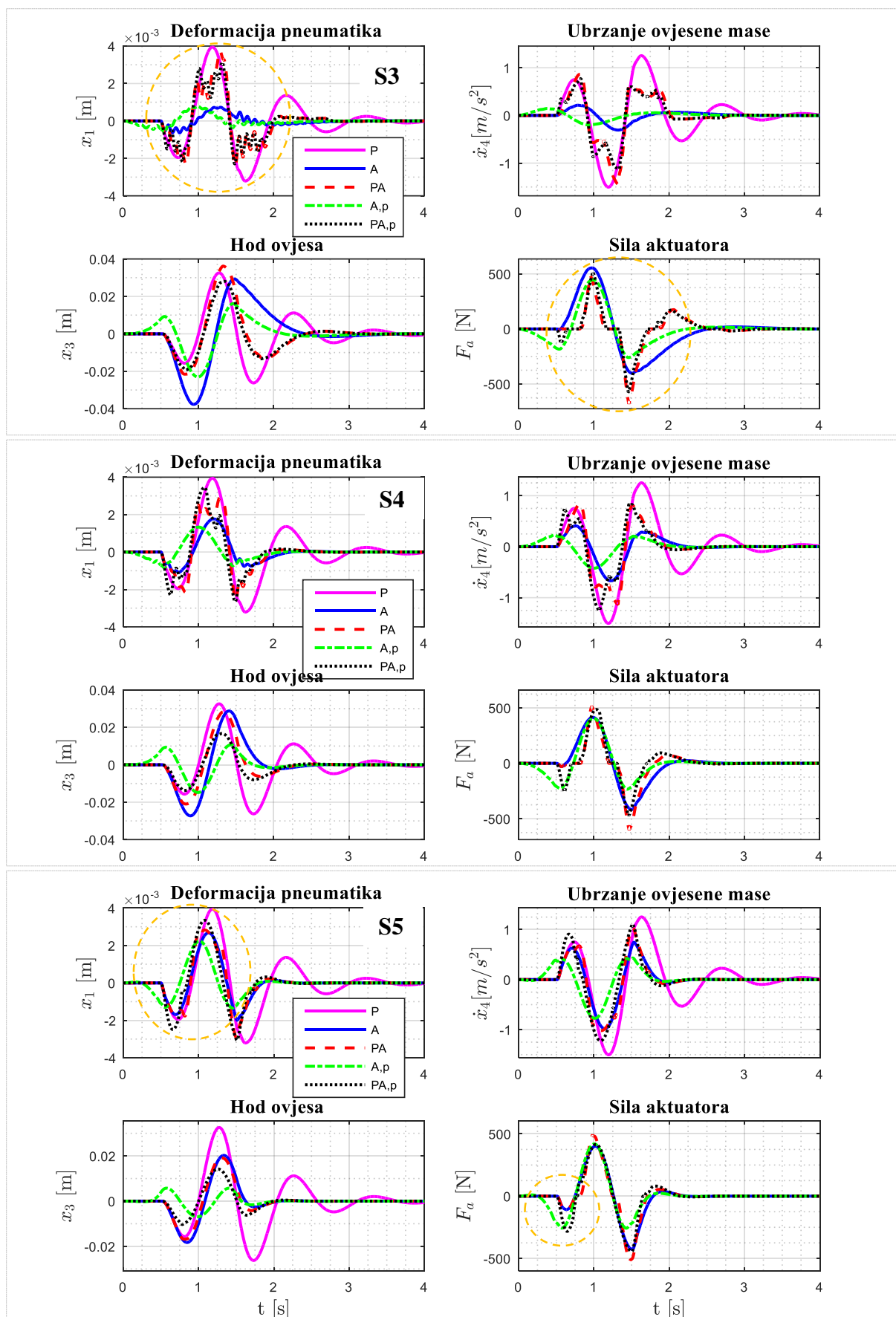
Tablica 3. Performanse pasivnog (P), poluaktivnog (PA), aktivnog (A), poluaktivnog s unaprijednim djelovanjem (PA,p) i aktivnog ovjesa s unaprijednim djelovanjem (A,p) na izbočini frekvencije $f = 1$ Hz za podešenja S3, S4 i S5

Standardna devijacija	P	PA	A	PA,p	A,p
deformacije pneumatika $x_{1,rms}$ [mm], S3	1,40 (0 %)	1,06 (-24,3 %)	0,25 (-82,1 %)	0,97 (-30,7 %)	0,25 (-82,1 %)
hoda ovjesa $x_{3,rms}$ [mm], S3	11,6 (0 %)	11,4 (-1,7 %)	13,9 (+ 19,8 %)	9,3 (-19,8 %)	7,6 (-34,5 %)
ubrzanja ovještene mase, $\dot{x}_{4,rms}$ [m/s ²], S3	0,539 (0 %)	0,398 (-26,1 %)	0,099 (-81,6 %)	0,357 (-33,7 %)	0,073 (-86,5 %)
deformacije pneumatika $x_{1,rms}$ [mm], S4	1,40 (0 %)	0,99 (-29,3 %)	0,55 (-60,7 %)	0,99 (-29,3 %)	0,43 (-69,3 %)
hoda ovjesa $x_{3,rms}$ [mm], S4	11,6 (0 %)	9,0 (-22,4 %)	10,4 (-10,3 %)	5,8 (-50,0 %)	4,8 (-58,6 %)
ubrzanja ovještene mase, $\dot{x}_{4,rms}$ [m/s ²], S4	0,539 (0 %)	0,370 (-31,3 %)	0,210 (-61,0 %)	0,358 (-33,6 %)	0,138 (-74,4 %)
deformacije pneumatika $x_{1,rms}$ [mm], S5	1,40 (0 %)	1,02 (-27,1 %)	0,86 (-38,6 %)	1,10 (-21,4 %)	0,69 (-50,7 %)
hoda ovjesa $x_{3,rms}$ [mm], S5	11,6 (0 %)	6,4 (-44,8 %)	6,8 (-41,4 %)	4,4 (-62,1 %)	2,4 (-79,3 %)
ubrzanja ovještene mase, $\dot{x}_{4,rms}$ [m/s ²], S5	0,539 (0 %)	0,376 (-30,2 %)	0,316 (-41,4 %)	0,403 (-25,2 %)	0,240 (-55,5 %)

Postavka S5, koja predstavlja postavku koja je najviše orijentirana prema upravljivosti, rezultira uvjerljivo najboljim performansama u vidu deformacije pneumatika. Nema oscilacija i odziv je vrlo dobro prigušen za sve tipove ovjesa te su oba poluaktivna ovjesa gotovo jednaka aktivnom ovjesu bez unaprijednog djelovanja dok aktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem i dalje daje najbolje performanse. Očekivano, ova postavka daje najlošiju udobnost vožnje od sve tri postavke no ta je udobnost vožnje značajno bolja od udobnosti vožnje pasivnog ovjesa. I po udobnosti, poluaktivni ovjesi su vrlo blizu performansama aktivnog ovjesa bez unaprijednog djelovanja. To je izravna posljedica dovoljno velikog relativnog koeficijenta prigušenja neovještene mase (~34 %) jer tada su aktivne sile gotovo uvijek prigušujuće te ih poluaktivni ovjesi mogu reproducirati.

Osim što služe za usporednu analizu podešenja i tipova ovjesa, simulacijski rezultati sa slike 29 pružaju inicijalan uvid u način rada aktivnog ovjesa s unaprijednim djelovanjem. U sve tri postavke je vidljivo odstupanje ponašanja aktivnog ovjesa s unaprijednim djelovanjem (zeleni linija) od ostalih ovjesa u početku, prije naleta na izbočinu koja se pojavljuje u $t=0,5$ s. Prvo što primjećujemo je da aktivni ovjes generira negativnu silu koja pritišće kotač u podlogu i podiže ovješenu masu (deformacija pneumatika je negativna, hod ovjesa pozitivan i ubrzanje ovještene mase je pozitivno). Zatim, deformacija pneumatika po nailasku na izbočinu u $t=0,5$ s počinje rasti i ranije od deformacije pneumatika ostalih ovjesa prelazi u pozitivne vrijednosti što sugerira da aktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem podiže kotač ispred izbočine kako bi izbjegao udar kotača u izbočinu. Isto tako, nakon vrha izbočine u $t=1$ s, deformacija pneumatika aktivnog ovjesa s unaprijednim djelovanjem ranije prelazi u niže vrijednosti nego deformacija pneumatika ostalih ovjesa što sugerira da se kotač prisilno spušta kako bi pratio profil podloge. Takvo djelovanje, gdje se ovješena masa podiže kako bi se stvorio prostor za povlačenje kotača, rezultira minimalnim prijenosom udara kotača u izbočinu na ovješenu masu i zato aktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem ima najveće poboljšanje udobnosti vožnje i najmanju deformaciju pneumatika te najbolje iskorištava dozvoljeni hod ovjesa. Poluaktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem ne može podići ovješenu masu i podizati kotač pred izbočinom zbog ograničenja pasivnosti (ne može reproducirati aktivnu, motorsku silu), ali zbog unaprijednog djelovanja može ranije krenuti s jačim prigušivanjem i na taj način više ublažiti prijenos udara na ovješenu masu, što je vidljivo u slučaju S5 na $t=0,5$ s.

Kvalitativno slično ponašanje je dobiveno i globalnom optimizacijom (vidi i rezultate pododjeljka 4.2.3.3) u [15] što potvrđuje da je dobiveni regulator po performansama blizu globalno optimalnog regulatora u linearnim uvjetima rada.

Slika 29. Simulacijski rezultati $\frac{1}{4}$ modela za frekvenciju pobude 1 Hz

4.2.3.2. Pobuda u srednjem području frekvencija

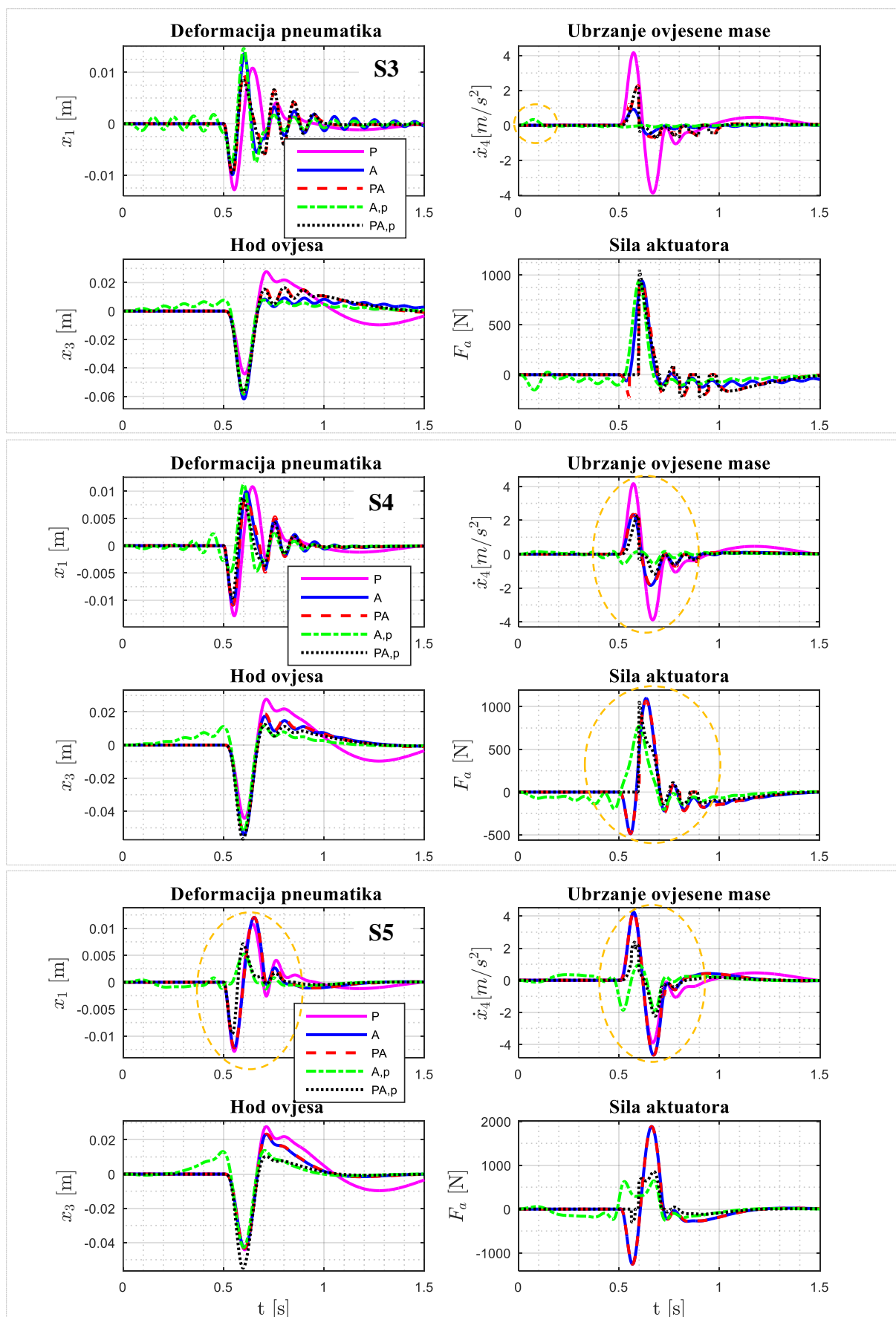
Drugi razmatrani slučaj uključuje pobudu s frekvencijom $f=5$ Hz koja pada u područje frekvencija koje je neugodno za ljude. Frekvencijske karakteristike pokazuju da možemo očekivati da će performanse aktivnog ovjesa s unaprijednim djelovanjem biti najbolje za sve tri postavke, da će performanse poluaktivnog ovjesa biti vrlo blizu (za S3) i praktički jednake (S4 i S5) performansama aktivnog ovjesa, da će i poluaktivni i aktivni ovjes bez unaprijednog djelovanja biti nešto lošiji od pasivnog ovjesa za postavku S5 te da će za postavke S4 i S5 poluaktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem biti bolji od aktivnog ovjesa bez unaprijednog djelovanja. Tablica 4 sadrži standardne devijacije simulacijskih odziva za ovaj scenarij. Prema standardnim devijacijama, aktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem jest najbolji, i poluaktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem za postavke S4 i S5 rezultira boljom upravljivosti i udobnosti vožnje od aktivnog ovjesa bez unaprijednog djelovanja. Poluaktivni ovjes za postavke S4 i S5 gotovo je jednak aktivnom ovjesu, dok za postavku S3 koja je više orijentirana prema udobnosti vožnje, aktivni ovjes rezultira boljim performansama, a za postavku S5 oba su nešto lošija po udobnosti od pasivnog ovjesa.

Simulacijski rezultati za postavku S3, orijentiranu prema udobnosti vožnje, prikazani na slici 30, potvrđuju opažanja koja su dana u prethodnom pododjeljku. Oscilacije deformacije pneumatika su ovdje puno izraženije za sve tipove ovjesa, ali je udobnost vožnje znatnije poboljšana nego u prethodnom slučaju, također za sve tipove ovjesa. Maksimalni iznos vertikalnog ubrzanja ovješene mase poluaktivnih ovjesa je upola manji od maksimalnog iznosa ubrzanja pasivnog ovjesa, dok je maksimalni iznos ubrzanja ovješene mase aktivnog ovjesa jednak četvrtini iznosa ubrzanja pasivnog ovjesa. Aktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem pruža najveće poboljšanje udobnosti vožnje te je kod njega ubrzanje ovješene mase vrlo blizu nule, a maksimalni iznos se pojavljuje tek u početku kada se ovješena masa krene podizati ($t=0,1$ s, vidi detalj na slici). U slučaju postavke S4 imamo manje oscilacija deformacije pneumatika no još uvijek odziv nije prigušen kao kod pasivnog ovjesa, ali su maksimalne vrijednosti deformacije pneumatika niže nego kod pasivnog ovjesa. Ubrzanje ovješene mase aktivnog ovjesa s unaprijednim djelovanjem je veće od onog za S3, te je vidljivo osciliranje oko nule s maksimalnim iznosom koji je približno osmina maksimalnog iznosa ubrzanja ovješene mase pasivnog ovjesa. Poluaktivni i aktivni ovjes bez unaprijednog djelovanja su jednaki, što znači da aktivni ovjes cijelo vrijeme generira silu prigušenja (vidi detalj na slici) koju poluaktivni ovjes uspijeva reproducirati. Također, poluaktivni ovjes s

Tablica 4. Performanse pasivnog (P), poluaktivnog (PA), aktivnog (A), poluaktivnog s unaprijednim djelovanjem (PA,p) i aktivnog ovjesa s unaprijednim djelovanjem (A,p) na izbočini frekvencije $f = 5$ Hz

Standardna devijacija	P	PA	A	PA,p	A,p
deformacije pneumatika $x_{1,rms}$ [mm], S3	3,06 (0 %)	2,51 (-17,9 %)	2,73 (-10,8 %)	2,45 (-19,9 %)	2,76 (-9,8 %)
hoda ovjesa $x_{3,rms}$ [mm], S3	12,9 (0 %)	12,9 (0 %)	12,7 (-1,6 %)	12,9 (0 %)	11,6 (-10,0 %)
ubrzanja ovještene mase, $\dot{x}_{4,rms}$ [m/s ²], S3	1,069 (0 %)	0,386 (-63,9 %)	0,188 (-82,4 %)	0,364 (-65,9 %)	0,068 (-93,6 %)
deformacije pneumatika $x_{1,rms}$ [mm], S4	3,06 (0 %)	2,44 (-20,3 %)	2,49 (-18,6 %)	2,10 (-31,4 %)	2,14 (-30,0 %)
hoda ovjesa $x_{3,rms}$ [mm], S4	12,9 (0 %)	12,0 (-7,0 %)	12,1 (-6,2 %)	12,0 (-7,0 %)	10,9 (-15,5 %)
ubrzanja ovještene mase, $\dot{x}_{4,rms}$ [m/s ²], S4	1,069 (0 %)	0,579 (-45,8 %)	0,543 (-49,2 %)	0,381 (-64,4 %)	0,147 (-86,3 %)
deformacije pneumatika $x_{1,rms}$ [mm], S5	3,06 (0 %)	3,12 (-1,9 %)	3,12 (-1,9 %)	1,79 (-41,5 %)	1,07 (-65,0 %)
hoda ovjesa $x_{3,rms}$ [mm], S5	12,9 (0 %)	10,9 (-15,5 %)	10,9 (-15,5 %)	11,2 (-13,2 %)	9,7 (-24,8 %)
ubrzanja ovještene mase, $\dot{x}_{4,rms}$ [m/s ²], S5	1,069 (0 %)	1,164 (+8,9 %)	1,167 (+9,1 %)	0,514 (-51,9 %)	0,468 (-56,2 %)

unaprijednim djelovanjem je bolji po udobnosti od aktivnog ovjesa bez unaprijednog djelovanja (vidi detalj na slici). Konačno, kod postavke S5, poluaktivni i aktivni ovjes bez unaprijednog djelovanja jednaki su, te su po performansama slični pasivnom ovjesu. Razlika je u tome što odzivi deformacije pneumatika i ubrzanja ovještene mase aktivnog i poluaktivnog ovjesa brže trnu u nulu nego odzivi pasivnog ovjesa ali imaju nešto veće maksimalne vrijednosti. Poluaktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem rezultira uvjerljivo boljom upravljivošću i udobnosti vožnje u odnosu na aktivni ovjes bez unaprijednog djelovanja (vidi detalje na slici), ne samo po standardnim devijacijama već i po maksimalnim iznosima. Maksimalni iznos ubrzanja ovještene mase je upola manji kod poluaktivnog ovjesa s unaprijednim djelovanjem nego kod aktivnog ovjesa bez unaprijednog djelovanja. Sve tri postavke za oba poluaktivna ovjesa i aktivni ovjes bez unaprijednog djelovanja imaju sličan hod ovjesa, čiji je odziv bolje prigušen nego kod pasivnog ovjesa. Jedino je aktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem drugačiji od ostalih zbog podizanja ovještene mase prije pojave izbočine.

Slika 30. Simulacijski rezultati $\frac{1}{4}$ modela za frekvenciju pobude 5 Hz

4.2.3.3. Pobuda na prirodnoj frekvenciji neovješene mase

U trećem i posljednjem razmatranom slučaju frekvencija pobude je $f=10$ Hz, tj. prirodna frekvencija neovješene mase. Prema frekvencijskim karakteristikama, deformacija pneumatika i hod ovjesa poluaktivnih ovjesa i aktivnog ovjesa bez unaprijednog djelovanja trebale bi za postavke S3 i S4 biti lošije od pasivnog ovjesa. Jedino se za postavku S5 očekuje da su poluaktivni i aktivni ovjesi bolji od pasivnog ovjesa. Međutim, aktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem bi za postavku S4 i S5 trebao biti znatno bolji od ostalih podešenja po deformaciji pneumatika i hodu ovjesa zbog pojave pojasne brane na prirodnoj frekvenciji neovješene mase.

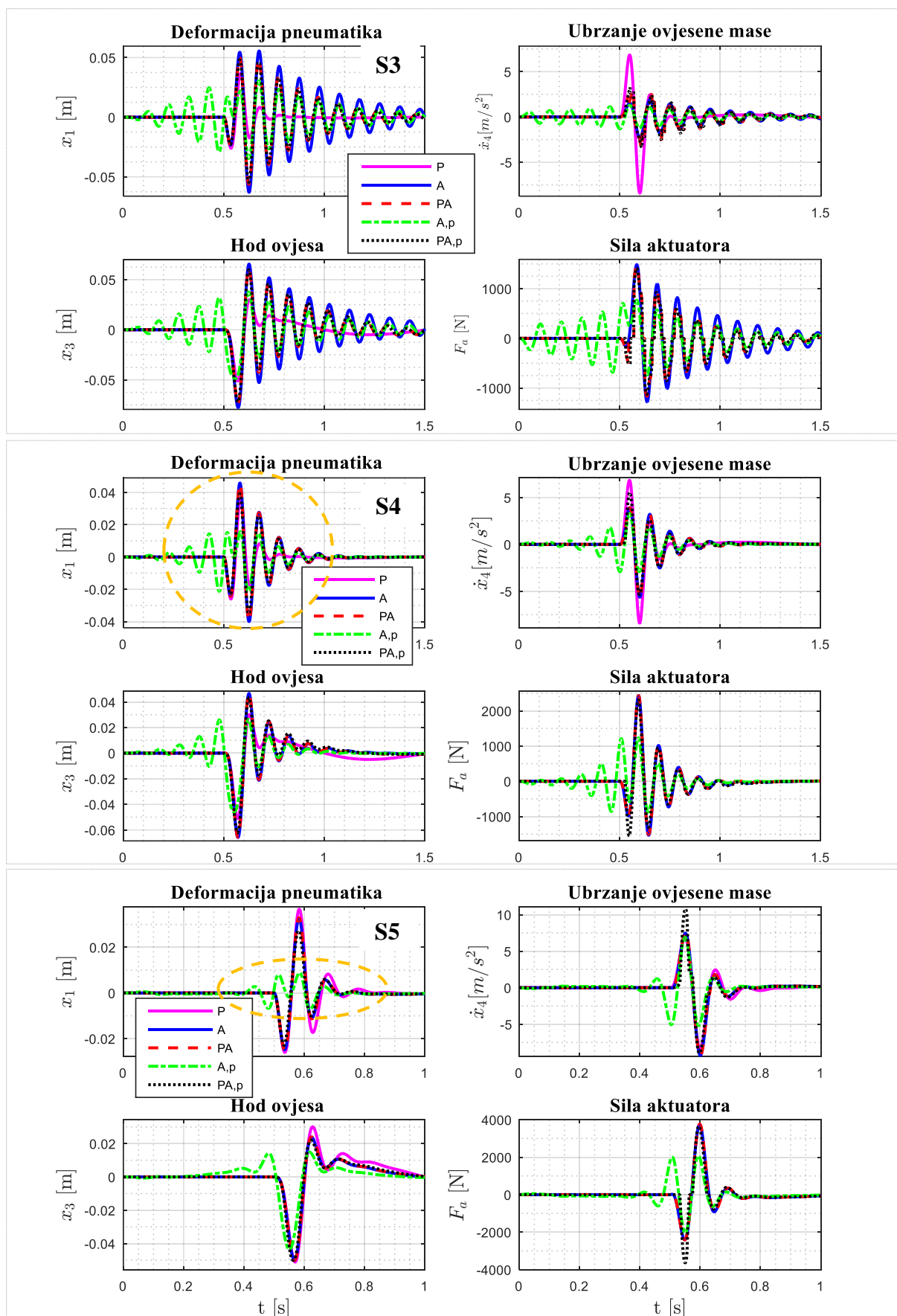
Tablica 5 sadrži standardne devijacije simulacijskih odziva, te prema danim rezultatima, za postavku S3 svi tipovi ovjesa rezultiraju znatno lošijom upravljivosti (od ~90% do gotovo 200 %) u odnosu na pasivni ovjes i znatno većim hodom ovjesa (do 108%). Međutim, udobnost vožnje je poboljšanja za ~47% u slučaju poluaktivnih ovjesa i do 66 % u slučaju aktivnog ovjesa. Za postavku S4, jedino aktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem rezultira boljom upravljivosti od pasivnog ovjesa (pojava pojasne brane) dok su aktivni i poluaktivni ovjes ~50 %, a poluaktivni ovjes s unaprijednim djelovanje ~35 % lošiji od pasivnog ovjesa. Međutim, kod postavke S5 svi tipovi ovjesa rezultiraju boljom upravljivosti nego pasivni ovjes uz napomenu da aktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem pruža iznimno veće poboljšanje upravljivosti u odnosu na ostale tipove ovjesa, te jedini pruža i poboljšanje udobnosti vožnje u odnosu na pasivni ovjes dok ostali tipovi ovjesa imaju nešto lošiju udobnost vožnje od pasivnog ovjesa.

Simulacijski rezultati prikazani su na slici 31. Kod postavke S3 pobuđivanje neovješene mase na prirodnoj frekvenciji rezultira velikim oscilacijama koje se sporo prigušuju (relativni koeficijent prigušenja je 4 %), što znatno narušava upravljivost ali i hod ovjesa. Također, maksimalne vrijednosti deformacije pneumatika i hoda ovjesa aktivnog ovjesa te poluaktivnih ovjesa su veće nego kod pasivnog ovjesa a jedino aktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem ima nižu maksimalnu vrijednost deformacije pneumatika od pasivnog ovjesa. Poluaktivni ovjesi ovdje imaju manje maksimalne vrijednosti deformacije pneumatika zbog gornjeg ograničenja koeficijenta prigušenja. Međutim, udobnost vožnje aktivnih i poluaktivnih ovjesa je bolja nego udobnost vožnje pasivnog ovjesa. Kod postavke S4 još uvijek postoje oscilacije deformacije pneumatika i hoda ovjesa koje se brže priguše nego kod postavke S3, ali su maksimalne vrijednosti i dalje veće nego maksimalne vrijednosti pasivnog ovjesa.

Tablica 5. Performanse pasivnog (P), poluaktivnog (PA), aktivnog (A), poluaktivnog s unaprijednim djelovanjem (PA,p) i aktivnog ovjesa s unaprijednim djelovanjem (A,p) na izbočini frekvencije $f = 10$ Hz

Standardna devijacija	P	PA	A	PA,p	A,p
deformacije pneumatika $x_{1,rms}$ [mm], S3	6,27 (0 %)	15,0 (+139 %)	18,46 (+194 %)	14,54 (+132 %)	11,78 (+87,8 %)
hoda ovjesa $x_{3,rms}$ [mm], S3	9,9 (0 %)	17,7 (+78,8 %)	20,6 (+108 %)	17,4 (+75,7 %)	15,0 (+51,5 %)
ubrzanja ovještene mase, $\dot{x}_{4,rms}$ [m/s ²], S3	1,512 (0 %)	0,803 (-46,9 %)	0,639 (-57,7 %)	0,801 (-47,0 %)	0,513 (-66,1 %)
deformacije pneumatika $x_{1,rms}$ [mm], S4	6,27 (0 %)	9,42 (+50,2 %)	9,55 (+52,3 %)	8,42 (+34,3 %)	5,83 (-7,0 %)
hoda ovjesa $x_{3,rms}$ [mm], S4	9,9 (0 %)	12,6 (+27,3 %)	12,7 (+28,3 %)	12,2 (+23,2 %)	10,4 (+5,0 %)
ubrzanja ovještene mase, $\dot{x}_{4,rms}$ [m/s ²], S4	1,512 (0 %)	1,093 (-27,7 %)	1,084 (-28,3 %)	1,114 (-26,3 %)	0,808 (-46,5 %)
deformacije pneumatika $x_{1,rms}$ [mm], S5	6,27 (0 %)	5,5 (-12,3 %)	5,44 (-13,2 %)	4,69 (-25,2 %)	1,9 (-69,7 %)
hoda ovjesa $x_{3,rms}$ [mm], S5	9,9 (0 %)	8,8 (-11,1 %)	8,7 (-12,1 %)	8,9 (-10,1 %)	8,0 (-19,2 %)
ubrzanja ovještene mase, $\dot{x}_{4,rms}$ [m/s ²], S5	1,512 (0 %)	1,593 (+5,4 %)	1,6 (+5,8 %)	1,647 (+8,9 %)	1,283 (-15,1 %)

Udobnost vožnje postavke S4 je bolja u odnosu na pasivni ovjes kod svih tipova ovjesa, ali je lošija nego kod postavke S3. Konačno, kod postavke S5 upravljivost aktivnog ovjesa i oba poluaktivna ovjesa je bolja nego upravljivost pasivnog ovjesa, dok je upravljivost aktivnog ovjesa s unaprijednim djelovanjem iznimno (3 do 5 puta) bolja od svih ostalih tipova ovjesa. Maksimalni iznos deformacije pneumatika kod aktivnog ovjesa s unaprijednim djelovanjem jednak je trećini maksimalnog iznosa ostalih tipova ovjesa (vidi detalj na slici). Ovakav rezultat je bio i očekivan jer u frekvencijskoj karakteristici vidimo pojasnu branu na 10 Hz. Udobnost vožnje aktivnog i poluaktivnih tipova ovjesa je gotovo jednaka udobnosti vožnje pasivnog ovjesa (čak je ~6 do 9 % lošija po standardnoj devijaciji), dok opet jedino aktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem daje poboljšanje udobnosti vožnje od 15 %.

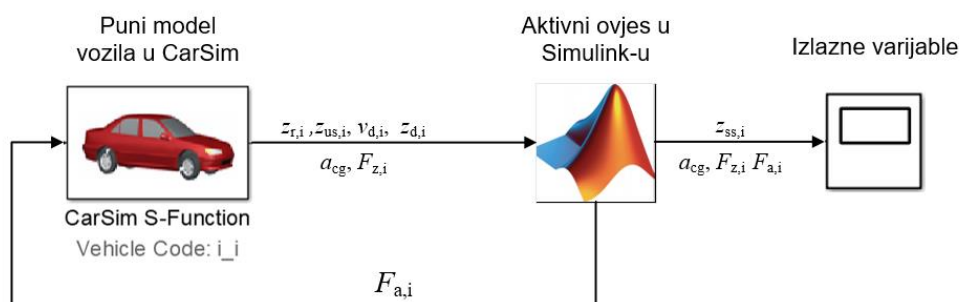


Slika 31. Simulacijski rezultati ¼ modela za frekvenciju pobude 10 Hz

5. SIMULACIJA PUNOG MODELA VOZILA U CARSIM-U

CarSim je programski paket namijenjen za precizno, detaljno i efikasno simuliranje i analiziranje dinamike vozila tj. određivanje performansi automobila u raznim scenarijima [42]. Matematički modeli sadržani u paketu su vrlo detaljni modeli cijelog vozila sa podsustavima koji se mogu parametrizirati na razne načine (konstantni parametri, nelinearne funkcije, ogledne tablice s više interpolacijskih metoda). Modeli ovjesa su nelinearni, sadrže puni opis kinematskih zavisnosti (npr. promjena usmjerenosti kotača u ovisnosti o hodu ovjesa), uključuju graničnike hoda i ostale detalje poput elastokinematike. Modeli guma uključuju modele temeljene na oglednim tablicama, Pacejka 5.2 model magične formule (eng. *Magic Formula*), Delft-Tyre tvrtke TASS i FTire tvrtke Cosin. Osim što sadrži veliki broj vozila i scenarija te načina parametriziranja komponenti vozila, CarSim podržava i ko-simulaciju s vanjskim softverima, poput MATLAB/Simulink, što je korišteno u ovom radu za simulacijsku provjeru aktivnog i poluaktivnog ovjesa na punom modelu vozila. Glavna je motivacija vidjeti može li sinteza zasnovana na jednostavnom modelu biti primjenjena na puni, nelinearni model vozila i rezultirati poboljšanjima u performansama.

Simulacija je postavljena na način da je u Simulink-u izrađen model aktivnog ovjesa za sva četiri kraja vozila koji iz CarSim-a prihvaća varijable vezane uz stanje ovjesa na svakom kraju vozila i popratne varijable koji su promatrani izlazi, dok u CarSim šalje aktivnu silu ($F_{a,i}$) koja zamjenjuje amortizer u modelu vozila. Slika 32 shematski prikazuje opisani simulacijski postav. Varijable koje se primaju iz CarSim-a i koriste se za rekonstrukciju varijabli stanja četvrtinskog modela su hod elementa ($z_{d,i}$) i derivacija hoda elementa (ovdje amortizera kojeg zamjenjujemo) tj. relativna brzina na elementu ($v_{d,i}$), položaj centra kotača ($z_{us,i}$) i položaj ceste ispod kotača ($z_{r,i}$).



Slika 32. Shematski prikaz simulacijskog postava Carsim + Simulink

U četvrtinskom modelu vozila jedna od pretpostavki je da su opruga i amortizer postavljeni okomito iznad gume. Međutim, kod stvarnih ovjesa opruga i amortizer obično su postavljeni pored kotača pod nekim kutem (npr. MacPherson-ova opružna noga) ili potpuno

udaljeni od kotača i postavljeni unutar vozila (npr. *push-rod* ovjes s dvostrukim poprečnim ramenima) te zbog toga relativni pomak između kotača i šasije (hod ovjesa) nije jednak relativnom pomaku (skraćanju/produljenju) tj. hodu opruge i amortizera. Omjer relativnog pomaka između kotača i šasije i relativnog pomaka elementa predstavlja mehanički prijenosni omjer (*MR* eng. *Mechanical Ratio*). Osim relativnih pomaka različiti su i iznosi sila, tj. vertikalna sila ovjesa koja djeluje kolinearno sa vertikalnom silom pneumatika (što je pretpostavljeno u četvrtinskom modelu vozila) nije jednaka sumi sila opruge i amortizera, a samim time niti krutost opruge u četvrtinskom modelu nije jednaka krutosti stvarne opruge, što također treba uzeti u obzir prilikom implementacije.

Slika 33 prikazuje MacPherson opružnu nogu (lijevo) s oprugom krutosti k i amortizerom koeficijenta prigušenja c i ekvivalentni četvrtinski model (desno) sa ekvivalentnom krutosti opruge k_{eq} i koeficijentom prigušenja c_{eq} . Mehanički prijenosni omjer MR za prikazani ovjes može se približno izračunati pomoću izraza:

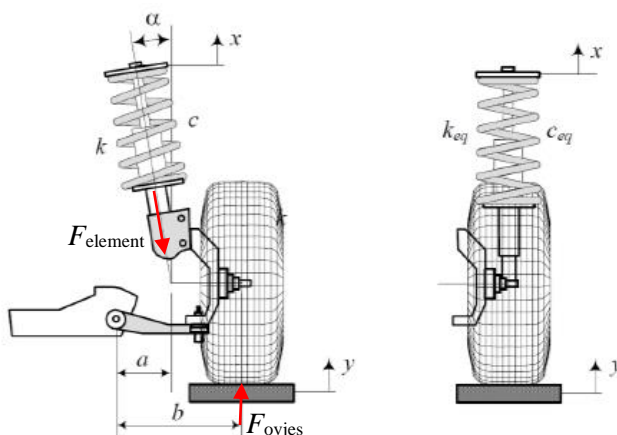
$$MR = \frac{\text{hod elementa}}{\text{hod ovjesa}} = \frac{F_{\text{ovjes}}}{F_{\text{element}}} \approx \frac{a}{b} \quad (5.1)$$

Stvarni mehanički prijenosni omjer koji proizlazi iz kinematske analize mehanizma drugačiji je za različite konstrukcijske izvedbe ovjesa i općenito je funkcija hoda ovjesa.

Ekvivalentna krutost opruge, uz (5.1), približno je jednaka [7, pog. 21]:

$$k_{eq} = k \cdot MR^2 \quad (5.2)$$

Ekvivalentni koeficijent prigušenja amortizera dobiva istim izrazom.



Slika 33. MacPherson-ova opružna noga (lijevo) i ekvivalentni četvrtinski model (desno) [4]

Osim ekvivalentne krutosti opruge i koeficijenta prigušenja potrebno je iz karakteristika vozila odrediti iznos ovještene mase na svakom kotaču. Vozilo je najčešće simetrično (ili barem približno simetrično) s obzirom na uzdužnu os vozila, tj. lijevi i desni kotač iste osovine su približno jednako opterećeni u stacionarnom stanju. Međutim, vozila su rijetko simetrična s

obzirom na poprečnu os vozila, tj. prednja i stražnja osovina su različito opterećene. Za određivanje statičke raspodjele mase po osovinama potrebno je poznavati položaj težišta (CoG, eng. *Center of gravity*) u odnosu na položaj osovina. Udaljenost prednje osovine od položaja težišta označena je s l_f , a udaljenost stražnje osovine od položaja težišta označena je s l_r . Zbroj tih udaljenosti daje međuosovinski razmak l . Dio ovješene mase koji opterećuje jedan prednji kotač približno se izračunava pomoću izraza:

$$m_{s,f} = M_s \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l_r}{l} \quad (5.3)$$

dok je dio ovješene mase koji opterećuje jedan stražnji kotač jednak:

$$m_{s,r} = M_s \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l_f}{l} \quad (5.4)$$

gdje je M_s ovješena masa cijelog vozila. Neovješena masa i krutost pneumatika mogu se izravno preuzeti iz karakteristika vozila.

Vozilo koje se koristi u simulacijama je limuzina iz D-segmenta, prikazano na slici 34, koje je reprezentativno za vozila poput *Volkswagen Passat*, *Audi A4*, *Ford Mondeo*, *Mercedes C-klasa*, *BMW serije 3* i tako dalje.



Slika 34. Primjer vozila iz D segmenta: CarSim (lijevo), stvarnost (desno) [43]

Karakteristike vozila koje su potrebne za dizajn aktivnog ovjesa preuzete su iz CarSim i to su:

- | | |
|---|---------------------------------------|
| • ovješena masa | $M_s = 1370 \text{ kg}$ |
| • neovješena masa (1 kotač) | $m_{us,f} = m_{us,r} = 40 \text{ kg}$ |
| • krutost prednje opruge | $k_f = 153 \text{ N/mm}$ |
| • krutost stražnje opruge | $k_r = 82 \text{ N/mm}$ |
| • vertikalna krutost pneumatika | $k_{tf} = k_{tr} = 268 \text{ N/mm}$ |
| • udaljenost prednje osovine od CoG | $l_f = 1110 \text{ mm}$ |
| • međuosovinski razmak | $l = 2780 \text{ mm}$ |
| • mehanički prijenosni omjer prednjeg ovjesa | $MR_f = 0.65144$ |
| • mehanički prijenosni omjer stražnjeg ovjesa | $MR_r = 0.797$ |

Pomoću izraza (5.2), (5.3) i (5.4) dobivaju se veličine koje ulaze u sintezu regulatora za prednji i stražnji ovjes. Regulator je za svaki kraj vozila dizajniran postupkom prikazanim u poglavlju 3, odnosno poglavlju 4 za poluaktivni ovjes. Težinski koeficijenti su određeni na temelju kovarijantne analize, gdje se htjela dobiti približno ista ili bolja upravljivost uz zadovoljavajući hod ovjesa u odnosu na pasivni ovjes. Odabrani su koeficijenti $r_{1f} = 20000$, $r_{2f} = 200$, $r_{1r} = 40000$ i $r_{2r} = 400$ što rezultira performansama linearnog četvrtinskog modela danim u tablici 6, uz napomenu da je nelinearna karakteristika amortizera pasivnog ovjesa linearizirana ($b_{sf} = b_{sr} = 3500$ Ns/m). Frekvencijske karakteristike dizajniranog prednjeg i stražnjeg ovjesa padaju između karakteristika S4 i S5 na slikama 25, 26 i 27. U svim modelima ovjesa, uključujući i aktivne ovjese, opruga se ne izostavlja jer nosi statičku težinu vozila.

Relativni koeficijent prigušenja neovještene mase aktivnog prednjeg ovjesa je za 10% veći nego kod pasivnog vozila, uz gotovo istu prirodnu frekvenciju, dok je relativni koeficijent prigušenja ovještene mase za 58,6 % veći nego kod pasivnog vozila uz gotovo dvostruko nižu prirodnu frekvenciju. Kod stražnjeg ovjesa je relativni koeficijent prigušenja neovještene mase aktivnog ovjesa 4% niži uz gotovo istu prirodnu frekvenciju u odnosu na pasivni ovjes, a relativni koeficijent prigušenja ovještene mase je za 46,6% viši u odnosu na pasivno vozilo, također uz gotovo dvostruko nižu prirodnu frekvenciju. Rezultati kovarijantne analize pokazuju da aktivni ovjes rezultira sličnom ili boljom upravljivošću uz sličan ili niži hod ovjesa te izrazito povećanom udobnosti vožnje (~43 % za prednji ovjes, ~28% za stražnji ovjes).

Tablica 6. Performanse ¼ modela s aktivnim i pasivnim ovjesom za vozilo iz CarSim-a

Performanse	PREDNJI OVJES		STRAŽNJI OVJES	
	PASIVNI	AKTIVNI	PASIVNI	AKTIVNI
Deformacija pneumatika $\tilde{x}_{1,rms}$	0,1452	0,113	0,1195	0,1152
Hod ovjesa $\tilde{x}_{3,rms}$	0,3899	0,3164	0,2655	0,28
Ubrzanje ovještene mase $\tilde{x}_{4,rms}$	70,1	39,7	79,9	57,9
Rel. koef. prigušenja neovještene mase ζ_{us}	0,215	0,306	0,33	0,292
Prirodna frekvencija neovještene mase $\omega_{n,us}$ [rad/s]	89,5	89,1	86,3	88,2
Rel. koef. prigušenja ovještene mase ζ_s	0,1	0,686	0,22	0,686
Prirodna frekvencija ovještene mase $\omega_{n,s}$ [rad/s]	11,3	6,03	12,8	7,24

Aktivni ovjes s unaprijednim regulacijskim djelovanjem po budućem profilu ceste dizajniran je uz vrijeme uzorkovanja $T = 5$ ms i vrijeme unaprijednog poznavanja ceste $t_p = 500$ ms te istim težinskim koeficijentima kao i aktivni ovjes. Poluaktivni ovjesi dobiveni su primjenom ograničenja tipa pasivnosti na regulatore aktivnog ovjesa (optimalna "odrezana" regulacija, vidi poglavlje 4) uz ograničenja koeficijenta prigušenja $b_{\max} = 20000$ Ns/m i $b_{\min} = 100$ Ns/m.

Simulacijski rezultati prikazani u nastavku dobiveni su korištenjem prethodno navedenih postavki. Ovjesi su ispitani u tri scenarija gdje su pobuđivana tri glavna relativna gibanja ovješene mase u odnosu na neovješenu masu: vertikalno gibanje (eng. *heave*), rotacija oko poprečne osi tj. poniranje (eng. *pitch*) i rotacija oko uzdužne osi tj. valjanje (eng. *roll*). U sva tri slučaja uzdužna brzina vozila je konstantna te je gibanje pravocrtno bez zavoja. Naime, kako je bilo navedeno ranije, pobuda uzrokovana uzdužnim ubrzanjem i kočenjem te skretanjem tj. vožnjom u zavoju može se poništiti dodatnim unaprijednim djelovanjem ukoliko mjerimo uzdužna i bočna ubrzanja, položaj pedale gasa i kočnice te kut skretanja na volanu. Pošto ta dodatna unaprijedna djelovanja nisu dizajnirana pobuda je ograničena samo na vertikalnu pobudu uzrokovanu profilom podloge.

Zahvaljujući punom modelu vozila u CarSim-u nismo ograničeni na varijable stanja i njihove derivacije kao u četvrtinskom modelu vozila. Stoga su odabrane sljedeće izlazne varijable vozila koje karakteriziraju:

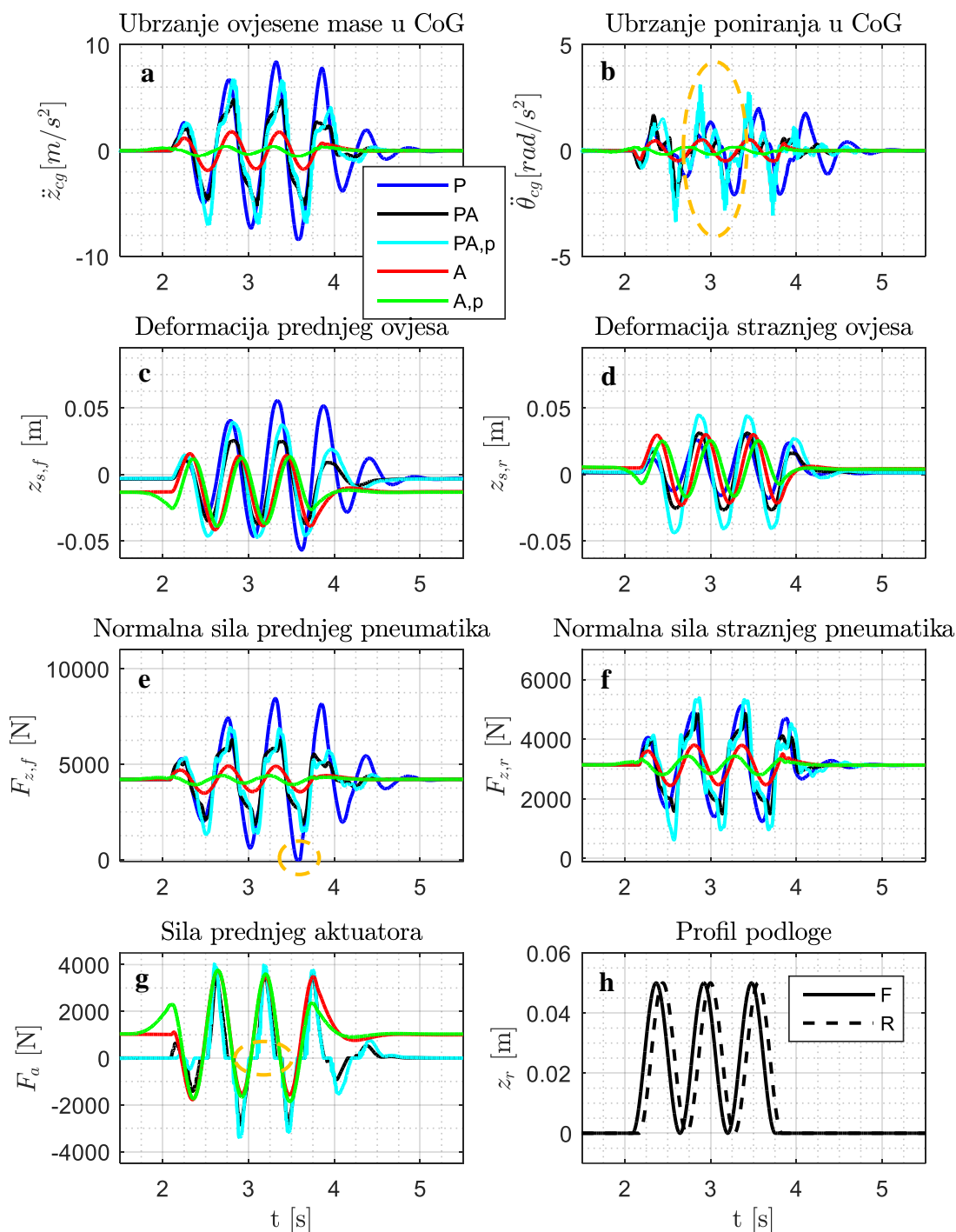
- Udobnost: vertikalno ubrzanje ovješene mase u težištu tj. CoG-u, (a_{cg}), ubrzanje poniranja u CoG, ubrzanje valjanja u CoG
- Upravljivost: normalne sile (F_z) na dodiru pneumatika i podloge. Ukoliko je došlo do odvajanja kotača od podloge normalna sila je jednaka nuli.
- Hod ovjesa: hodovi ovjesa na svakom kotaču za koje su poznata konstrukcijska ograničenja. Ukoliko hod ovjesa uđe u granično područje dolazi do udara u graničnike koji imaju vrlo visoku krutost ($k_g = 10000$ N/mm)

5.1. Scenarij 1: Pobuđivanje rezonantne frekvencije ovješene mase pasivnog vozila

Rezonantna frekvencija ovješene mase pasivnog ovjesa je između 1,7 Hz i 2 Hz. Za pobuđivanje rezonantne frekvencije generiran je sintetički profil ceste koji se sastoji od tri uzastopne izbočine generirane pomoću kosinusnog modela (vidi poglavlje 2). Izbočine su dužine 20 m, odabrana uzdužna brzina vozila je 130 km/h što rezultira frekvencijom pobude od 1,805 Hz. Simulacijski rezultati prikazani su na slici 35, gdje je generirani profil u vremenu dan na slici 35 h.

Aktivni ovjes s unaprijednim regulacijskim djelovanjem po budućem profilu ceste (zeleno linija, A,p), tj. aktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem daje najveće poboljšanje udobnosti (slika 35 a i b) u odnosu na ostale tipove ovjesa. Maksimalno vertikalno ubrzanje u težištu ovjesa A,p ne prelazi $\pm 0,5 \text{ m/s}^2$ odnosno maksimalno ubrzanje poniranja oko težišta ne prelazi $\pm 0,2 \text{ rad/s}^2$, što u odnosu na pasivni ovjes (plava linija, P), gdje maksimalna ubrzanja iznose $\sim \pm 8,4 \text{ m/s}^2$ i $\pm 2 \text{ rad/s}^2$, predstavlja poboljšanje od $\sim 95 \%$ odnosno 90% . Aktivni ovjes (crvena linija, A) rezultira nešto lošijim performansama u odnosu na ovjes s unaprijednim djelovanjem (A,p) ali svejedno značajnim poboljšanjem udobnosti od $\sim 75 \%$ u odnosu na pasivni ovjes. Poluaktivni ovjesi (crna i svijetlo plava linija) poboljšavaju udobnost u vidu smanjenja vertikalnog ubrzanja u odnosu na pasivni ovjes, ali kod ubrzanja poniranja ne smanjuju maksimalne iznose jer zbog ograničenja tipa pasivnosti dolazi do povremenih naglih povećanja ubrzanja poniranja (vidi detalj na slici 35 b i g). Aktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem rezultira i najboljom upravljivošću (slika 35 e i f), normalna sila prednjih kotača mijenja se u iznosu od $\sim \pm 200 \text{ N}$ u odnosu na statičku silu (4200 N) dok se kod pasivnog ovjesa mijenja u iznosu od $\pm 4200 \text{ N}$ te u trenutku $t=3,55 \text{ s}$ dolazi do kratkotrajnog odvajanja kotača od podloge. Kod stražnjih pneumatika ne dolazi do odvajanja kotača od podloge ali se normalna sila pasivnog ovjesa mijenja u granicama od $\sim \pm 1800 \text{ N}$, dok je kod ovjesa A,p u granicama od $\sim \pm 300 \text{ N}$ u odnosu na statičku silu (3150 N). Aktivni ovjes bez unaprijednog djelovanja (A) je opet nešto lošiji u odnosu na ovjes s unaprijednim djelovanjem, ali je značajno bolji od pasivnog i poluaktivnih ovjesa. Poluaktivni ovjesi su po upravljivosti bolji od pasivnog ovjesa na prednjim kotačima ali približno jednaki, ako ne i nešto lošiji na stražnjim kotačima. Svi ovjesi su zadržali hod ovjesa unutar ograničenja od -61,4 mm do 92,1 mm za prednji ovjes odnosno od -62,7 mm do 87,8 mm za stražnji ovjes (slika 35 c i d). Oba aktivna ovjesa imaju približno jednake hodove, koji su po maksimalnim iznosima dvostruko niži na prednjem ovjesu u odnosu na pasivni, i nešto veći od pasivnog na stražnjem ovjesu. Poluaktivni ovjesi na prednjem kraju rezultiraju manjim hodovima u odnosu na pasivno vozilo dok na stražnjem ovjesu imaju veći

hod ovjesa u odnosu na pasivno vozilo. Sile aktuatora prednjeg ovjesa prikazane su na slici 35 g), gdje je vidljivo da najveći dio vremena aktuator radi u "generatorskom" režimu, tj. tražene sile su sile prigušenja. Jedino se kod aktivnog ovjesa s unaprijednim djelovanjem na početku javlja značajnija "motorska" sila (vidi vrh oko 2 s).



Slika 35. Simulacijski rezultati iz CarSim-a za više uzastopnih izbočina za vozilo s pasivnim ovjesom (plavo, P), aktivnim ovjesom (crveno, A), poluaktivnim ovjesom (crno, PA), poluaktivnim i aktivnim ovjesom s unaprijednim regulacijskim djelovanjem po budućem profilu ceste (svijetlo plavo PA,p i zeleno A,p)

5.2. Scenarij 2: Sinusoidna pobuda promjenjive frekvencije za pobuđivanje vertikalnog ubrzanja i poniranja

Sinusoidna pobuda promjenjive frekvencije (eng. *Bounce Sine Sweep Test*) jedna je od standardnih procedura za ispitivanje udobnosti vožnje u CarSim-u. Profil ceste, prikazan na slici 36 h, sastoji se od sinusoide kojoj se u prostoru (pri vožnji konstantnom brzinom i u vremenu) frekvencija povećava a amplituda smanjuje progresivno. Pobuda lijevih i desnih kotača je jednaka, pa se ovim profilom pobuđuje vertikalno gibanje vozila i poniranje. Odabrana uzdužna brzina vozila je 40 km/h što rezultira rasponom frekvencija pobude od ~0,5 Hz do ~12 Hz za dani profil ceste. Za razliku od scenarija 1, ovom pobudom je moguće dobiti uvid u ponašanje vozila na različitim frekvencijama. Radi preglednosti, na slici 36 su prikazani rezultati samo za pasivno vozilo (plava linija, P), vozilo s aktivnim ovjesom (crvena linija, A) i vozilo s aktivnim ovjesom s unaprijednim regulacijskim djelovanjem (zeleno linija, A,p). U tablici 7 dane su performanse aktivnih i poluaktivnih ovjesa u odnosu na pasivni ovjes u obliku standardnih devijacija promatranih izlaznih varijabli.

Iz performansa danih u tablici 7 slijedi da, prema standardnim devijacijama, aktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem daje najveća poboljšanja udobnosti vožnje (~74 %) i upravljivosti (~54 %) u odnosu na pasivno vozilo. Poluaktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem daje druga najveća poboljšanja udobnosti vožnje (~ 47%) i upravljivosti (~41%) te je bolji od aktivnog ovjesa. Međutim, ta se poboljšanja najviše vide u srednjem području frekvencija (podešenja padaju između S4 i S5, vidi poglavlje 4) dok je pri nižim frekvencijama pobude, kao što je bilo prikazano u scenariju 1, aktivni ovjes bolji. Poluaktivni ovjes bez unaprijednog djelovanja s ovakvim postavkama ne nudi značajna poboljšanja udobnosti ni upravljivosti. Prema standardnim devijacijama hoda ovjesa možemo zaključiti da aktivni ovjesi više iskorištavaju hod ovjesa od poluaktivnih ovjesa te da sve četiri varijante rezultiraju nižim hodom ovjesa od pasivnog vozila, najvećim dijelom zbog izrazito velikog relativnog koeficijenta prigušenja ovješene mase.

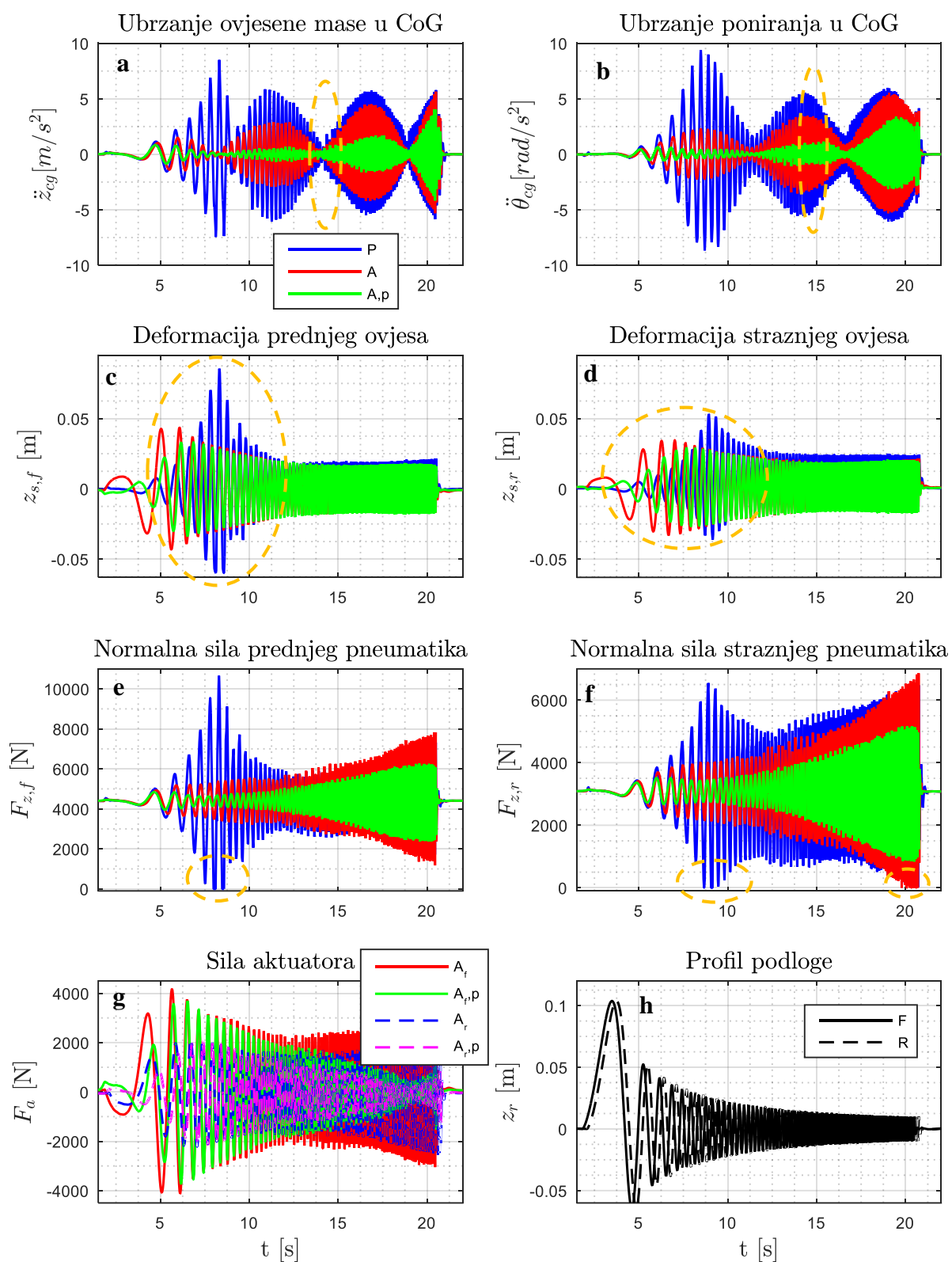
Slike 36 a i b prikazuju ubrzanja u težištu (CoG) gdje je jasno vidljivo da aktivni ovjes nema izražen rezonantni vrh na prirodnoj frekvenciji ovješene mase te vrlo dobro prigušuje vibracije u nižem i srednjem frekvencijskom području (5 s do 15 s), dok aktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem ima odlično prigušenje vibracija čak i u odnosu na aktivni ovjes. Približavanjem rezonantnoj frekvenciji neovješene mase (18 s nadalje) prigušenje pada te se razlika između pasivnog i aktivnih ovjesa smanjuje. Pojava koja se može vidjeti u primjerice 14 s (vidi detalj na slici), gdje je vertikalno ubrzanje minimalno za sve ovjese a ubrzanje poniranja najveće ili obrnuto u ~12 s, je posljedica međuosovinskog razmaka i kašnjenja

pobude. Naime, ukoliko se prednji i stražnji kotači istovremeno nađu na vrhu ili dnu izbočine tj. ukoliko su gibanja prednjih i stražnjih kotača u fazi, vozilo se giba vertikalno gore-dolje i nema poniranja. Taj se slučaj pojavljuje ukoliko je valna duljina profila podloge jednaka međuosovinskom razmaku ili višekratniku međuosovinskog razmaka. Suprotan slučaj je onaj u kojem gibanja prednjih i stražnjih kotača nisu u fazi npr. ukoliko se prednji kotači nađu na vrhu a stražnji na dnu izbočine. Tada gotovo da nema vertikalnog gibanja u težištu već je prisutno samo poniranje i u tom slučaju je valna duljina profila podloge jednaka polovici međuosovinskog razmaka ili "neparnom" višekratniku ($\lambda=(0,5+n)l$) [14]. U ostalim slučajevima, pogotovo pri vožnji stvarnim profilima, dolazi do istodobnog vertikalnog gibanja i poniranja.

Tablica 7. Performanse aktivnog (A), aktivnog s unaprijednim regulacijskim djelovanjem po budućem profilu ceste (A,p), poluaktivnog (PA), poluaktivnog s unaprijednim djelovanjem (PA,p) i pasivnog (P) ovjesa za sinusoidnu pobudu poniranja

Standardna devijacija	P	PA	A	PA,p	A,p
vertikalnog ubrzanja ovještene mase u CoG $\ddot{z}_{cg,rms}$ [m/s ²]	2,3880 (0 %)	2,2681 (-5 %)	1,4517 (-39,2 %)	1,2664 (-47 %)	0,6118 (-74,4 %)
ubrzanja poniranja ovještene mase u CoG $\ddot{\theta}_{cg,rms}$ [rad/s ²]	2,7557 (0 %)	2,4496 (-11,1 %)	1,5764 (-42,8 %)	1,4464 (-47,5 %)	0,7052 (-74,4 %)
normalne sile prednjih pneumatika $F_{z,f,rms}$ [N]	1364,4 (0 %)	1374,6 (-0,75 %)	987,6 (-27,6 %)	834,11 (-38,9 %)	604,5 (-55,7 %)
normalne sile stražnjih pneumatika $F_{z,r,rms}$ [N]	1351 (0 %)	1239,8 (-8,2 %)	1022,5 (-24,3 %)	763,5 (-43,5 %)	643,0 (-52,4 %)
hoda prednjeg ovjesa $z_{sf,rms}$ [mm]	16,8 (0 %)	12,8 (-23,8 %)	15,6 (-7,1 %)	12,8 (-23,8 %)	13,2 (-21,4 %)
hoda stražnjeg ovjesa $z_{sr,rms}$ [mm]	12,9 (0 %)	11,8 (-8,5 %)	13,9 (+7,7 %)	11,4 (-11,6 %)	12,1 (-6,2 %)

Hod ovjesa u slučaju aktivnog ovjesa (slika 36 c i d) je najveći pri najnižim frekvencijama gdje je prigušenje najmanje (vidi npr. sliku 27, S4) te se povećavanjem frekvencije pobude smanjuje. U području rezonantne frekvencije pasivnog ovjesa (~8 s) hod ovjesa u slučaju aktivnih ovjesa je manji nego kod pasivnog ovjesa, kod kojeg hod dolazi vrlo blizu fizičkim granicama. Međutim, povećavanjem frekvencije pobude hod ovjesa pasivnog vozila se smanjuje dok hod aktivnih ovjesa ostaje približno konstantan.



Slika 36. Simulacijski rezultati iz CarSim-a za sinusoidnu pobudu za vozilo s pasivnim ovjesom (plavo, P), aktivnim ovjesom (crveno, A) i aktivnim ovjesom s unaprijednim regulacijskim djelovanjem po budućem profilu ceste (zeleno, A_p)

Varijacija normalne sile prednjih i stražnjih pneumatika (vidi slike 36 e i f) u slučaju aktivnih ovjesa, pogotovo kod ovjesa s unaprijednim djelovanjem, je vrlo mala u nisko-frekvencijskom području (do ~12 s) što predstavlja odličnu upravljivost vozilom u odnosu na pasivno vozilo kod kojeg, zbog rezonancije ovještene mase, dolazi do odvajanja kotača od podloge (vidi detalj oko 8 s). Povećavanjem frekvencije pobude (~ 15 s nadalje) varijacije normalne sile rastu, te u slučaju aktivnog i pasivnog ovjesa pri frekvenciji koja je vrlo blizu prirodne frekvencije neovještene mase (~20 s) dolazi do odvajanja stražnjih kotača od podloge, što nije slučaj za aktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem.

Slika 36 g) prikazuje silu prednjih i stražnjih aktuatora aktivnog ovjesa (A_f i A_r) i aktivnog ovjesa s unaprijednim djelovanjem ($A_{f,p}$ i $A_{r,p}$). Pri vrlo niskim (do 5 s), srednjim te višim frekvencijama pobude (iznad 12 s) sila aktuatora aktivnog ovjesa s unaprijednim djelovanjem je manja nego kod aktivnog ovjesa bez unaprijednog djelovanja. Samim time bi i snaga te potrošnja energije bile niže što dodatno ide u prilog unaprijednom djelovanju, koje se pokazalo kao najbolja opcija.

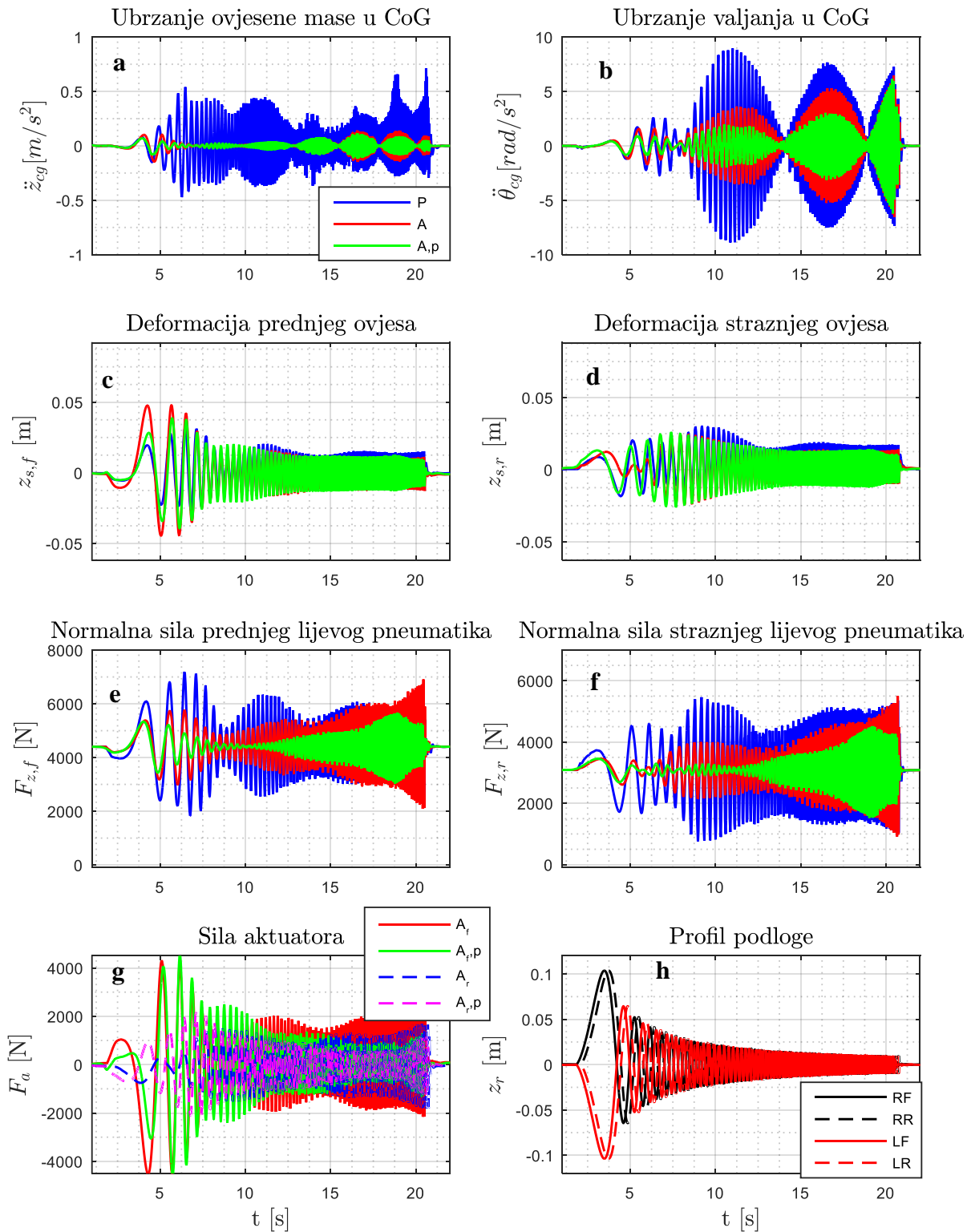
5.3. Scenarij 3: Sinusoidna pobuda promjenjive frekvencije za pobuđivanje valjanja

Sinusoidna pobuda za pobuđivanje valjanja (eng. *Cross Slope Sine Sweep Test*) je modifikacija sinusoidne pobude scenarija 2. Pobuda lijevih i desnih kotača, prikazana na slici 37 h više nije ista već je različitog predznaka. U tablici 8 su dane performanse u obliku standardnih devijacija promatranih varijabli aktivnih i poluaktivnih ovjesa u odnosu na pasivni ovjes, dok simulacijski rezultati prikazani na slici 37 uključuju aktivne ovjese i pasivni ovjes.

Aktivni ovjes s unaprijednim regulacijskim djelovanjem ponovo rezultira najvećim poboljšanjima udobnosti vožnje (ovdje je naglasak na ubrzanju valjanja) i upravljivosti u odnosu na pasivni ovjes (vidi slike 37 a, b, e i f). Poluaktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem po performansama je vrlo blizu aktivnom ovjesu te oba ovjesa pružaju značajna poboljšanja u odnosu na pasivni ovjes. Zapažanja vezana uz ostale promatrane varijable jednaka su onima za scenarij 2, osim što u ovom scenariju ne dolazi do odvajanja kotača od podloge.

Tablica 8. Performanse aktivnog (A), aktivnog s unaprijednim regulacijskim djelovanjem po budućem profilu ceste (A,p), poluaktivnog (PA), poluaktivnog s unaprijednim djelovanjem (PA,p) i pasivnog (P) ovjesa za sinusoidnu pobudu valjanja

Standardna devijacija	P	PA	A	PA,p	A,p
vertikalnog ubrzanja ovješene mase u CoG $\ddot{z}_{cg,rms}$ [m/s ²]	0,1774 (0 %)	0,0862 (-51,4 %)	0,0618 (-65,2 %)	0,0870 (-50,9 %)	0,0555 (-68,7 %)
ubrzanja poniranja ovješene mase u CoG $\ddot{\theta}_{cg,rms}$ [rad/s ²]	0,1372 (0 %)	0,0556 (-59,5 %)	0,0382 (-72,1 %)	0,0619 (-54,9 %)	0,0294 (-78,6 %)
ubrzanja valjanja ovješene mase u CoG $\ddot{\phi}_{cg,rms}$ [rad/s ²]	3,0509 (0 %)	2,7377 (-10,3 %)	1,7615 (-42,2 %)	1,8566 (-39,1 %)	1,1078 (-63,7 %)
normalne sile prednjih pneumatika $F_{z,f,rms}$ [N]	997,8 (0 %)	1024,1 (+2,6 %)	722,5 (-27,6 %)	681,4 (-31,7 %)	404,9 (-59,4 %)
normalne sile stražnjih pneumatika $F_{z,r,rms}$ [N]	1034,1 (0 %)	864,7 (-16,4 %)	637,2 (-38,4 %)	552,8 (-46,5 %)	395,8 (-61,7 %)
hoda prednjeg ovjesa $z_{sf,rms}$ [mm]	10,1 (0 %)	9,8 (-2,9 %)	14,2 (+40,6 %)	10,2 (+1,0 %)	12,5 (+23,7 %)
hoda stražnjeg ovjesa $z_{sr,rms}$ [mm]	9,8 (0 %)	9,7 (+1 %)	9,0 (-8,1 %)	10,1 (+3,1 %)	10,6 (+8,2 %)



Slika 37. Simulacijski rezultati iz CarSim-a za više uzastopnih bump-ova za vozilo s pasivnim ovjesom (plavo, P), aktivnim ovjesom (crveno, A) i aktivnim ovjesom s unaprijednim regulacijskim djelovanjem po budućem profilu ceste (zeleno, A,p)

6. ZAKLJUČAK

U diplomskom radu provedena je sinteza sustava upravljanja vertikalnom dinamikom vozila uz primjenu aktivnog i poluaktivnog ovjesa, zasnovana na korištenju linearnog kvadratičnog regulatora (LQR) s i bez unaprijednog djelovanja zasnovanog na unaprijednom poznavanju vertikalnog profila ceste. Dana je kratka teorijska podloga o linearnom kvadratičnom regulatoru u kontinuiranoj i diskretnoj domeni a detaljnije je prikazan izvod regulatora s unaprijednim djelovanjem po budućem profilu ceste. Pri sintezi regulatora koristio se linearni, vremenski invarijantni četvrtinski model vozila s jednim stupnjem slobode gibanja (samo ovješena masa), kao i model s dva stupnja slobode gibanja (oveješena i neovješena masa).

Najprije se LQR primjenio na model s jednim stupnjem slobode gibanja kod kojeg je moguće izvesti analitički zakon upravljanja te provedbom analize kovarijanci dobiti analitičke izraze međuovisnosti standardnih devijacija ubrzanja ovještene mase (koja reflektira udobnost vožnje) i hoda ovjesa (skraćeno performansi) s obzirom na stohastičku pobudu podloge. Usporedbom analitički i numerički dobivenih performansi zaključeno je da je izrađeni numerički alat primjenjiv i na kompliciranije modele vozila kod kojih je teško (ili nemoguće) dobiti analitičke izraze. Za jednostavniji model je prikazan i postupak sinteze regulatora s unaprijednim djelovanjem po budućem profilu ceste, te su rezultati dobiveni primjenom unaprijednog djelovanja pokazali da je moguće dobiti značajna poboljšanja udobnosti vožnje (do 16 puta niža uz isti hod ovjesa) primjenom unaprijednog djelovanja.

Usporedna analiza kvalitete regulacije pomoću standardnih devijacija (analiza kovarijanci) temeljena na jednadžbi varijanci primjenjiva je isključivo na linearnim sustavima. Međutim, za primjenu metode na nelinearnim sustavima, poput poluaktivnog ovjesa, izrađen je alat za provedbu analize kovarijanci temeljen na preciznom simulacijskom modelu. Izrađeni su simulacijski modeli linearnih sustava pomoću kojih je provjerena preciznost alata usporedbom s poznatim analitičkim i numeričkim rezultatima, a nakon uspješne provjere istim su postupkom izrađeni precizni simulacijski modeli poluaktivnog ovjesa. Pri izradi preciznog simulacijskog modela potrebno je voditi računa o tome da je trajanje stohastičke pobude dovoljno dugo kako bi se pobudio i najsporiji mod sustava (ovješena masa), ali druge strane nije poželjno da se simulacija predugo izvodi. Stoga je vrijeme trajanja simulacije postavljeno proporcionalno najvećoj periodi oscilacija (najsporiji mod) zatvorenog regulacijskog kruga. Pokazano je da alat daje vrlo precizne rezultate s malim odstupanjima koje su posljedica konačnog vremenskog koraka i vremenskog trajanja simulacije i neidealnog izvora stohastičke pobude. Izrađeni

simulacijski modeli aktivnih ovjesa primjenjeni su i za više-kriterijsko optimiranje pojačanja regulatora primjenom genetskih algoritama, dok su simulacijski modeli poluaktivnih ovjesa korišteni pri određivanju frekvencijskih karakteristika poluaktivnog ovjesa.

Nadalje, izrađeni numerički alati primjenjeni su na modelu s dva stupnja slobode gibanja kod kojeg osim udobnosti vožnje i hoda ovjesa postoji treći kriterij – upravljivost vozilom. Dobivene performanse prikazane su na dva 2D dijagrama, a za lakše razumijevanje i usporednu analizu performansi izrađen je novi prikaz putem 3D dijagrama koji objedinjuje sva tri kriterija. Usporednom analizom standardnih devijacija ubrzanja ovješene mase, hoda ovjesa i deformacije pneumatika zaključeno je da, iako su sva prikazana rješenja optimalna, postoji uži skup rješenja kod kojih ne dolazi do zasićenja jednog od kriterija (uz značajno pogoršanje barem jednog od preostala dva kriterija) i koji je značajan za primjenu. Za ovaj su model također izrađeni simulacijski modeli za provođenje analize kovarijanci simulacijom, po uzoru na prethodni slučaj s jednim stupnjem slobode gibanja, te je pokazano da su izrađeni modeli vrlo precizni (rezultati su vrlo blizu numerički dobivenim rezultatima). Sa tim zaključcima pristupilo se primjeni unaprijednog djelovanja, razvijenog ranije, na model s dva stupnja slobode gibanja. Usporednom analizom standardnih devijacija pokazano je: i) da je primjenom unaprijednog djelovanja moguće postići poboljšanje udobnosti vožnje od 61 % u odnosu na pasivno vozilo, dok je bez unaprijednog djelovanja moguće postići poboljšanje od tek 15 %, uz zadržavanje istog stupnja upravljivosti vozilom, ii) da utjecaj unaprijednog djelovanja na poboljšanje performansi ovisi o polovima zatvorenog regulacijskog sustava bez unaprijednog djelovanja, iii) da postoji gornja granica vremenskog prozora unaprijednog poznavanja profila ceste iznad koje nema značajnih poboljšanja performansi, te da je njen iznos u korelaciji s periodom oscilacija ovješene mase ($1 / \text{prirodna frekvencija ovješene mase}$), tj. što je prirodna frekvencija ovješene mase veća potrebno je manje vrijeme unaprijednog poznavanja profila ceste i obrnuto. Granica vremenskog prozora jednaka jednoj periodi oscilacija ovješene mase je dovoljna da dođe do zasićenja poboljšanja jer pojačanja unaprijednog regulacijskog djelovanja postanu iznimno mala.

Sustav regulacije poluaktivnim ovjesom koji je prikazan u ovom radu zasniva se na primjeni iste LQR strategije kao za aktivni ovjes, ali uz primjenu ograničenja tipa pasivnosti na izlaz regulatora (tj. na referencu sile aktivnog ovjesa). Uvidi i saznanja dobiveni usporednim analizama sustava regulacije aktivnim ovjesom primjenjeni su pri sintezi sustava regulacije poluaktivnim ovjesom, te je broj podešenja regulatora smanjen na šest kako bi se lakše provele daljnje analize. Usporednom analizom standardnih devijacija zaključeno je da u slučaju

"mekših" podešenja (označenih kao S1, S2, S3), tj. podešenja kod kojih je udobnost vožnje uvelike poboljšanja a upravljivost pogoršana, dolazi do zasićenja performansi poluaktivnog ovjesa koje postaju znatno lošije od aktivnog ovjesa. Razlog pogoršanja leži u niskom stupnju prigušenja neovještene mase, pa je tražena sila regulatora (u prisustvu neizbježne paralelne opruge u ovjesu) često motorska sila koju poluaktivni ovjes ne može reproducirati. Ti su razlozi potvrđeni kasnije analizom u vremenskoj domeni. Također je pokazano da su u slučaju "tvrđih" podešenja (označenih kao S4, S5, S6) performanse poluaktivnog ovjesa blizu performansama aktivnog ovjesa (oba bez unaprijednog djelovanja), te da su pri određenim podešenjima performanse poluaktivnog ovjesa s unaprijednim djelovanjem bolje nego performanse aktivnog ovjesa bez unaprijednog djelovanja.

Daljnja analiza je provedena u frekvencijskom području. Za potrebe analize izrađen je numerički alat za dobivanje amplitudno-frekvencijskih karakteristika (AFK) nelinearnog poluaktivnog ovjesa koji je verificiran na linearnom aktivnom ovjesu za koji se AFK može odrediti na egzaktn način. Analizom AFK za četiri podešenja (S2, S3, S4 i S5) zaključeno je da aktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem najbolje prigušuje vertikalne vibracije, posebice u srednjem frekvencijskom području (2 do 8 Hz) koje se općenito smatra najneugodnijim za vozača. Također, kod aktivnog ovjesa s unaprijednim djelovanjem dolazi do pojave pojasne brane u frekvencijskoj karakteristici deformacije pneumatika na prirodnoj frekvenciji neovještene mase, što znatno poboljšava njegovu upravljivost u odnosu na ostale tipove ovjesa koji na toj frekvenciji imaju rezonantni vrh. Širina i dubina pojasne brane u izravnoj su korelaciji sa povećavanjem vremena unaprijednog poznavanja profila ceste. Nadalje, AFK pokazuju da za tvrđa podešenja poluaktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem nadmašuje aktivni ovjes bez unaprijednog djelovanja u srednjem frekvencijskom području, dok je pri niskim frekvencijama lošiji, pogotovo oko rezonantne frekvencije ovještene mase (analiza kovarijanci pokazuje da do poboljšanja dolazi ali ne pokazuje gdje i na kojim frekvencijama).

Analiza u vremenskoj domeni provedena je koristeći kosinusni model izbočine s tri različite frekvencije pobude. Usporedna analiza u vremenskoj domeni prvo je potvrdila razloge pogoršanja performansi poluaktivnih ovjesa u slučaju mekših podešenja. Drugo, potvrdila je prethodno donesene zaključke o performansama različitih tipova ovjesa i podešenja. Nadalje, pružila je uvide u to kako se koji ovjes ponaša u vremenskoj domeni i koliki su maksimalni iznosi ubrzanja ovještene mase, hoda ovjesa, deformacije pneumatika i sile aktuatora što prethodne dvije analize ne pružaju. Analiza odziva u vremenskoj domeni pokazala je da aktivni i poluaktivni ovjesi brže smiruju hod ovjesa i deformaciju pneumatiku od pasivnog ovjesa (što

je i očekivano s obzirom na više stupnjeve prigušenja), osim na prirodnoj frekvenciji neovješene mase gdje dolazi do rezonancije. Međutim, najbitnije što je analiza vremenskih odziva dala jest uvid u rad aktivnog ovjesa s unaprijednim djelovanjem. Uočeno je da aktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem prije izbočine podiže ovješenu masu a kotač pritišće u podlogu, da bi pred samom izbočinom krenuo podizati kotač preko izbočine, a nakon nje prisilno ga spuštati kako bi kotač pratio profil izbočine. Ovakvim djelovanjem minimizira se udar kotača u izbočinu i prijenos nastalih vertikalnih sila na ovješenu masu čime se poboljšava i udobnost vožnje ali i upravljivost. Na temelju danih analiza može se zaključiti da jedna metoda analize nadopunjuje drugu i da je svaka jednako važna i korisna u različitim stadijima razvoja tj. podešavanja te vrednovanja sustava regulacije.

Konačno, sa svim stečenim uvidima i znanjima iz danih analiza pristupilo se implementaciji aktivnog i poluaktivnog ovjesa u simulacijskom okruženju na puni model vozila primjenom jednog podešenja. Simulacija je provedena u dobro poznatom programskom paketu namijenjenom za analizu dinamike vozila – CarSim. CarSim sadrži puni, nelinearni model vozila s dinamikom odvajanja kotača od podloge, tvrdih ograničenja hoda ovjesa i slično. Sinteza sustava upravljanja provedena je za svaku osovinu zasebno, koristeći postupak prikazan u trećem i četvrtom poglavlju, a pri sintezi su parametri vozila potrebni za dobivanje pojačanja regulatora preuzeti iz karakteristika vozila i prema potrebi prilagođeni, također prikaznim postupkom. Ovjesi su ispitani u tri scenarija u vremenskoj domeni, gdje su pobuđivana glavna gibanja ovješene mase – vertikalno gibanje, poniranje i valjanje. Pritom se pri analizi više nisu koristile varijable stanja ovjesa i njihove derivacije već su izravno korištene varijable koje opisuju udobnost vožnje a vezane su uz gibanje u/oko težišta šasije (vertikalno ubrzanje, ubrzanje poniranja i ubrzanje valjanja u težištu), upravljivost vozilom (normalne sile na kontaktu pneumatika i podloge), te hod ovjesa na svakom kraju vozila. Simulacijski rezultati pokazali su da je primjenom regulatora zasnovanog na četvrtinskom modelu vozila moguće ostvariti značajna poboljšanja udobnosti vožnje i upravljivosti u odnosu na pasivno vozilo. Ovdje također aktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem rezultira najvećim poboljšanjima udobnosti vožnje (~70 %) i upravljivosti (~50-60 %) u odnosu na pasivno vozilo, a poluaktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem pruža veća poboljšanja od aktivnog ovjesa bez unaprijednog djelovanja (uz odabrano podešenje koje pada između S4 i S5).

Jedan dio rada posvećen je i optimizaciji pojačanja regulatora koristeći više-kriterijsko optimiranje genetskim algoritmom. Razvijen je alat za optimiranje pojačanja regulatora na temelju simulacijskog modela sa stohastičkom pobudom ceste. Provedeno je optimiranje na

linearnom modelu za koji su poznate optimalne performanse. Pokazano je da više-kriterijsko optimiranje rezultira Pareto frontom koja odgovara rezultatima dobivenim sintezom optimalnog regulatora, što otvara dodatne mogućnost primjene postupka za dobivanje optimalnog regulatora u slučaju nelinearnih modela vozila ili sustava regulacije poluaktivnim ovjesom koja je inherentno nelinearna.

Konačno, može se zaključiti da aktivni i poluaktivni ovjesi s i bez unaprijednog djelovanja po budućem profilu ceste pružaju poboljšanja udobnosti vožnje i upravljivosti vozilom, koja rastu gotovo jednako kao i složenost tj. cijena izvede. Najjednostavniji i najjeftiniji poluaktivni ovjesi pružaju najmanja, ali svejedno značajna poboljšanja u odnosu na pasivno vozilo, dok aktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem zahtijeva brze aktuatore, značajniju dodatnu energiju, najviše procesorske moći računala i najviše senzoričke, te time predstavlja najskuplje rješenje ali pruža i najviše poboljšanja. Aktivni ovjes bez unaprijednog djelovanja (kompliciraniji i skuplji aktuatori) i poluaktivni ovjes s unaprijednim djelovanjem (bolje računalo, više senzoričke) padaju između prethodna dva tipa ovjesa kako po zahtjevima tako i po performansama. Međutim, neovisno o tipu mehatroničkog ovjesa, njihova najveća prednost u odnosu na pasivni ovjes leži u mogućnosti adaptiranja karakteristika ovjesa prema uvjetima vožnje i/ili želji vozača, koja se provodi promjenom parametara regulatora iz više skupova optimalnih parametara.

Prikazana sinteza sustava regulacije, izrađeni alati za analizu performansi i optimiranje, te prikazani rezultati mogu biti temelj i motivacija za daljnje poboljšanje sustava regulacije aktivnih i poluaktivnih ovjesa. Mogući pravci daljnjeg razvoja uključuju:

- Primjenu sinteze i alata na polovinskim modelima vozila koji uključuju prednju i stražnju osovinu. Pritom se otvara mogućnost sinteze upravljačkog međudjelovanja regulatora prednje i stražnje osovine s ciljem dodatnog poboljšanja udobnosti vožnje. Osim toga, polovinski model vozila otvara mogućnost izravnog penaliziranja vertikalnog ubrzanja i ubrzanja poniranja u težištu, ili alternativno na lokaciji sjedala u vozilu. Također, osim na polovinski model vozila moguće je isto primijeniti i na puni model vozila.
- Primjenu razvijenih alata za više-kriterijsko optimiranje na nelinearnim modelima, te optimiranje pojačanja inherentno nelinearnog sustava regulacije poluaktivnim ovjesom.

LITERATURA

- [1] Guzey, P.K., Fiorello, D., Martino, A., Scarcella, G., Alemanno, A., Zubaryeva, A., Thiel, C., "Driving and parking patterns of European car drivers – a mobility survey", European Commission, 2012. Datum pristupa: 28.6.2018.
<http://publications.jrc.ec.europa.eu/repository/handle/JRC77079>
- [2] U.S. Department of Transportation, "How Much Time Do Americans Spend Behind the Wheel?", 2017. Datum pristupa: 28.6.2018. <https://www.volpe.dot.gov/news/how-much-time-do-americans-spend-behind-wheel>
- [3] Tseng, H.E., Hrovat, D., "State of the art survey: active and semi-active suspension control", Vehicle System Dynamics, 2015;53(7):1034-1062
- [4] Šagi, G., Lulić, Z., Ormuž, K., "Ovjes vozila", Podloge za predavanje iz kolegija "Motorna Vozila", Sveučilište u Zagrebu FSB, 2017.
- [5] Savaresi, S.M., "Semi-Active Suspension Control Design for Vehicles", Butterworth-Heinemann, 2010
- [6] Hrovat, D., "Survey of Advanced Suspension Developments and Related Optimal Control Applications", Automatica, 1997;33(10):1781-1817
- [7] Mastinu, G., Ploechl, M., "Road and Off-Road Vehicle System Dynamics Handbook", CRC Press, 2014
- [8] "Safety and Comfort: Suspension Technology for Passenger Cars", Datum pristupa: 26.6.2018
https://www.zf.com/global/media/product_media/cars_5/cars_suspension_technology_cdc/pdf_53/doppelseiten_daempfungsmodule_engl_20110823.pdf
- [9] "MagneRide Controlled Suspension Systems", Datum pristupa: 26.6.2018.
<http://www.bwigroup.com/product/magneride-controlled-suspension-system/>
- [10] "Magic Body Control", Datum pristupa: 26.6.2018.
<https://www.mercedes-benz.com/en/mercedes-benz/innovation/magic-body-control/>
- [11] Lungwitz, C., "Looking Ahead to the new Audi A8: Fully Active Suspension Offers Tailor-made Flexibility", Datum pristupa: 26.6.2018.
<https://www.audi-mediacycenter.com/en/press-releases/looking-ahead-to-the-new-audi-a8-fully-active-suspension-offers-tailor-made-flexibility-9046>
- [12] Adcock, I., "Audi Details New A8 Active Suspension", Datum pristupa: 26.6.2018.
<https://www.sae.org/news/2017/07/audi-details-new-a8-active-suspension>

- [13] "ClearMotion Proactive Ride", Datum pristupa: 26.6. 2018.
<https://www.clearmotion.com/technology>
- [14] "The Tyre – Mechanical and Acoustic Comfort", Michelin, Clermont-Ferrand, 2002
- [15] Čorić, M., Deur, J., Xu, L., Tseng, H.E., Hrovat, D. "Optimisation of Active Suspension Control Inputs for Improved Vehicle Ride Performance", *Vehicle System Dynamics*, 2016;54(7):1004-1030
- [16] Xu, L., Tseng, H.E., Hrovat, D., "Hybrid Model Predictive Control of Active Suspension with Travel Limits and Nonlinear Tire Contact Force", *American Control Conference*, Boston, 2016
- [17] Hrovat, D., "Optimal Active Suspension Structures for Quarter-car Vehicle Models", *Automatica*, 1990;26(5):845-860
- [18] Newland, D.E. "An Introduction to Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis", Prentice Hall, 1993
- [19] Bogsjö, K., Podgórski, K., Rychlik, I., "Models for Road Surface Roughness", *Vehicle System Dynamics*, 2012;50(5):725-747
- [20] Čorić, M., Deur, J., "Optimization-based Analysis of Active Suspension Authority within Integrated Vehicle Dynamics Control Systems", *13th International Symposium on Advanced Vehicle Control (AVEC'16)*, München, 2016
- [21] Streiter, R., "Active Preview Suspension System ABC Prescan in the F700", *ATZ* 05/2008, Vol. 110,
- [22] Hać, A., "Optimal Linear Preview Control of Active Vehicle Suspension", *Vehicle System Dynamics*, 1992;21:167-195
- [23] Thompson, A.G., Davis, B.R., Pearce, C.E.M., "An Optimal Linear Active Suspension with Finite Road Preview", *SAE Technical paper*, Detroit, 1980
- [24] Hrovat D., "Optimal Suspension Performance for 2-D Vehicle Models", *Journal of Sound and Vibration*, 1991;146(1):93-110
- [25] Giorgetti, N., Bemporad, A., Tseng, H.E., Hrovat, D., "Hybrid Model Predictive Control Application Towards Optimal Semi-Active Suspension", *IEEE International Symposium on Industrial Electronics (ISIE)*, 391-397, Dubrovnik, 2005
- [26] Kasać, J., "Vođenje tehničkih sustava", Podloge za predavanje iz kolegija „Vođenje tehničkih sustava", Sveučilište u Zagrebu FSB, 2007.
- [27] Moore, J.B., Anderson, B., "Optimal Control – Linear Quadratic Methods", Prentice-Hall Inc., 1989

- [28] Friedland, B., "Control System Design – An Introduction to State-Space Methods", Dover Publications, New York, 1986
- [29] Isermann, R., "Digital Control Systems", Springer-Verlag, 1981
- [30] Franklin, G., Powell, J., Workman, M., "Digital Control of Dynamic Systems", Addison Wesley Longman Inc., 1998
- [31] Hrovat, D., Hubbard, M., "Optimum Vehicle Suspensions Minimizing RMS Rattlespace, Sprung-Mass Acceleraton and Jerk", ASME J. Dynamic Systems, Measurement and Control, 1981;103(3):228-236
- [32] "Power Spectral Density Estimates Using FFT", Mathworks, Datum pristupa: 28.6.2018, <https://www.mathworks.com/help/signal/ug/power-spectral-density-estimates-using-fft.html>
- [33] Bender, E.K., "Optimization of the random vibrations characteristics of vehicle suspensions using random process theory", Doktorski rad, MIT, Cambridge, 1967
- [34] "Encyclopedia of optimization", 2nd ed. Springer US, New York, 2009
- [35] Poles, S., "MOGA-II An Improved Multi-Objective Genetic Algorithm", 2003
- [36] ModeFRONTIER, Datum pristupa: 29.6.2018, <https://www.esteco.com/technology/optimization-algorithms>
- [37] Karnopp, D., Crosby, M., "The Active Damper – A New Concept for Shock and Vibration Control", The Shock and Vibration Bulletin, 1973
- [38] Hrovat, D., Margolis, D., Hubbard, M., "An Approach Toward the Optimal Semi-Active Suspension", ASME Journal of Dynamic System, Measurement and Control, 1988;110(3):288-296
- [39] Tseng, H.E., Hedrick, J.K., "Semi-Active Control Laws – Optimal and Sub-Optimal", Vehicle System Dynamics, 1994;23(7):545-569
- [40] "Frequency Response Estimation of Simulink Models", Mathworks, datum pristupa: 25.6.2018., <https://www.mathworks.com/help/slcontrol/ug/frestimate.html>
- [41] Hedrick, J.K., Butsuen, T., "Invariant Properties of Automotive Suspensions", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1990;204:21-27
- [42] CarSim, datum pristupa: 22.6.2018, https://www.carsim.com/downloads/pdf/carsim_handout.pdf
- [43] Mercedes C-klasa, [https://en.wikipedia.org/wiki/Mercedes-Benz_C-class_\(W205\)#/media/File:Mercedes-Benz_C_180_Exclusive_\(W_205\)_%E2%80%93_Frontansicht,_24._Oktober_2015,_M%C3%BCnster.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Mercedes-Benz_C-class_(W205)#/media/File:Mercedes-Benz_C_180_Exclusive_(W_205)_%E2%80%93_Frontansicht,_24._Oktober_2015,_M%C3%BCnster.jpg)

Prilog A – izvod matrice pojačanja K_2 kod unaprijednog poznavanja ceste

Matrica optimalnih pojačanja diskretnog regulatora po varijablama stanja dana je izrazom (3.19). Uvrštavanjem matrice sustava, matrice ulaza i težinskih matrica proširenog sustava danih izrazima (3.67) i (3.68) u (3.19) dobivamo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^{1 \times 2} & \mathbf{K}_2^{1 \times N} \end{bmatrix} = \left(\mathbf{R} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_v^{T 1 \times 2} & \mathbf{0}^{1 \times N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}^{2 \times 2} & P_{12}^{2 \times N} \\ P_{12}^{T N \times 2} & P_{22}^{N \times N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_v^{2 \times 1} \\ \mathbf{0}^{N \times 1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{B}_v^{T 1 \times 2} & \mathbf{0}^{1 \times N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}^{2 \times 2} & P_{12}^{2 \times N} \\ P_{12}^{T N \times 2} & P_{22}^{N \times N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{2 \times 2} & \mathbf{A}_2^{2 \times N} \\ \mathbf{0}^{N \times 2} & \mathbf{A}_3^{N \times N} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

što nakon sređivanja rezultira s:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^{1 \times 2} & \mathbf{K}_2^{1 \times N} \end{bmatrix} &= \left(\mathbf{R} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_v^{T 1 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} & \mathbf{B}_v^{T 1 \times 2} P_{12}^{2 \times N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_v^{2 \times 1} \\ \mathbf{0}^{N \times 1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \\ &\quad \begin{bmatrix} \mathbf{B}_v^{T 1 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} & \mathbf{B}_v^{T 1 \times 2} P_{12}^{2 \times N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{2 \times 2} & \mathbf{A}_2^{2 \times N} \\ \mathbf{0}^{N \times 2} & \mathbf{A}_3^{N \times N} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1^{1 \times 2} & \mathbf{K}_2^{1 \times N} \end{bmatrix} &= \left(\mathbf{R} + \mathbf{B}_v^{T 1 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} \mathbf{B}_v^{2 \times 1} \right)^{-1} \cdot \\ &\quad \begin{bmatrix} \mathbf{B}_v^{T 1 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} \mathbf{A}_1^{2 \times 2} & \mathbf{B}_v^{T 1 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} \mathbf{A}_2^{2 \times N} + \mathbf{B}_v^{T 1 \times 2} P_{12}^{2 \times N} \mathbf{A}_3^{N \times N} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_1^{1 \times 2} &= \left(\mathbf{R} + \mathbf{B}_v^{T 1 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} \mathbf{B}_v^{2 \times 1} \right)^{-1} \mathbf{B}_v^{T 1 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} \mathbf{A}_1^{2 \times 2} \\ \mathbf{K}_2^{1 \times N} &= \left(\mathbf{R} + \mathbf{B}_v^{T 1 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} \mathbf{B}_v^{2 \times 1} \right)^{-1} \left(\mathbf{B}_v^{T 1 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} \mathbf{A}_2^{2 \times N} + \mathbf{B}_v^{T 1 \times 2} P_{12}^{2 \times N} \mathbf{A}_3^{N \times N} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Iz (A.2) slijedi da za dobivanje matrica pojačanja moramo riješiti diskretnu algebarsku Riccatijevu jednadžbu (3.20) kako bi dobili P_{11} i P_{12} .

Uvrštavanjem matrica proširenog sustava u (3.17) dobivamo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_{11}^{2 \times 2} & P_{12}^{2 \times N} \\ P_{12}^{T N \times 2} & P_{22}^{N \times N} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_v^{2 \times 2} & \mathbf{0}^{2 \times N} \\ \mathbf{0}^{N \times 2} & \mathbf{0}^{N \times N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{T 2 \times 2} & \mathbf{0}^{2 \times N} \\ \mathbf{A}_2^{T N \times 2} & \mathbf{A}_3^{T N \times N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}^{2 \times 2} & P_{12}^{2 \times N} \\ P_{12}^{T N \times 2} & P_{22}^{N \times N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{2 \times 2} & \mathbf{A}_2^{2 \times N} \\ \mathbf{0}^{N \times 2} & \mathbf{A}_3^{N \times N} \end{bmatrix} - \\ &\quad \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{T 2 \times 2} & \mathbf{0}^{2 \times N} \\ \mathbf{A}_2^{T N \times 2} & \mathbf{A}_3^{T N \times N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}^{2 \times 2} & P_{12}^{2 \times N} \\ P_{12}^{T N \times 2} & P_{22}^{N \times N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_v^{2 \times 1} \\ \mathbf{0}^{N \times 1} \end{bmatrix} \left(\mathbf{R} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_v^{T 1 \times 2} & \mathbf{0}^{1 \times N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}^{2 \times 2} & P_{12}^{2 \times N} \\ P_{12}^{T N \times 2} & P_{22}^{N \times N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_v^{2 \times 1} \\ \mathbf{0}^{N \times 1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot (\text{A.3}) \\ &\quad \begin{bmatrix} \mathbf{B}_v^{T 1 \times 2} & \mathbf{0}^{1 \times N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}^{2 \times 2} & P_{12}^{2 \times N} \\ P_{12}^{T N \times 2} & P_{22}^{N \times N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{2 \times 2} & \mathbf{A}_2^{2 \times N} \\ \mathbf{0}^{N \times 2} & \mathbf{A}_3^{N \times N} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nakon nekoliko koraka operacijama nad matricama dobiva se matrična jednadžba:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} P_{11}^{2 \times 2} & P_{12}^{2 \times N} \\ P_{12}^{T N \times 2} & P_{22}^{N \times N} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_v^{2 \times 2} & \mathbf{0}^{2 \times N} \\ \mathbf{0}^{N \times 2} & \mathbf{0}^{N \times N} \end{bmatrix} + \\
&\begin{bmatrix} A_1^{T 2 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} A_1^{2 \times 2} & A_1^{T 2 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} A_2^{2 \times N} + A_1^{T 2 \times 2} P_{12}^{2 \times N} A_3^{N \times N} \\ A_2^{T N \times 2} P_{11}^{2 \times 2} A_1^{2 \times 2} + A_3^{T N \times N} P_{12}^{2 \times N} A_1^{2 \times 2} & A_2^{T N \times 2} P_{11}^{2 \times 2} A_2^{2 \times N} + A_3^{T N \times N} P_{12}^{2 \times N} A_2^{2 \times N} + A_2^{T N \times 2} P_{12}^{2 \times N} A_3^{N \times N} + A_3^{T N \times N} P_{22}^{N \times N} A_3^{N \times N} \end{bmatrix} - \\
&\begin{bmatrix} A_1^{T 2 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} B_v^{2 \times 1} \\ A_2^{T N \times 2} P_{11}^{2 \times 2} B_v^{2 \times 1} + A_3^{T N \times N} P_{12}^{2 \times N} B_v^{2 \times 1} \end{bmatrix} (R + B_v^{T 1 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} B_v^{2 \times 1})^{-1} \cdot \\
&\begin{bmatrix} B_v^{T 1 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} A_1^{2 \times 2} & B_v^{T 1 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} A_2^{2 \times N} + B_v^{T 1 \times 2} P_{12}^{2 \times N} A_3^{N \times N} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Iz (A.4) možemo izlučiti jednadžbe za dobivanje P_{11} i P_{12} :

$$\begin{aligned}
P_{11}^{2 \times 2} &= Q_v^{2 \times 2} + A_1^{T 2 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} A_1^{2 \times 2} - A_1^{T 2 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} B_v^{2 \times 1} (R + B_v^{T 1 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} B_v^{2 \times 1})^{-1} B_v^{T 1 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} A_1^{2 \times 2} \\
P_{12}^{2 \times N} &= A_1^{T 2 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} A_2^{2 \times N} + A_1^{T 2 \times 2} P_{12}^{2 \times N} A_3^{N \times N} - A_1^{T 2 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} B_v^{2 \times 1} (R + B_v^{T 1 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} B_v^{2 \times 1})^{-1} (B_v^{T 1 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} A_2^{2 \times N} + B_v^{T 1 \times 2} P_{12}^{2 \times N} A_3^{N \times N})
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Uspoređivanjem izraza za dobivanje matrice pojačanja K_1 u (A.2) s izrazom za matricu pojačanja diskretnog linearnog kvadratičnog regulatora (3.19), te usporedbom izraza za dobivanje rješenja P_{11} u (A.5) s izrazom (3.20) zaključujemo da su slični, točnije, matrica pojačanja K_1 je matrica pojačanja za slučaj bez unaprijednog poznavanja ceste, a P_{11} je rješenje jednadžbe (3.20) s kojim se dobiva matrica pojačanja K_1 . Dakle, matrica pojačanja K_1 koja množi varijable stanja vozila jednaka je matrici pojačanja koja se dobiva i za slučaj da ne koristimo unaprijedno poznavanje ceste.

Nadalje, vrijedi:

$$\begin{aligned}
K_1^{1 \times 2} &= (R + B_v^{T 1 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} B_v^{2 \times 1})^{-1} B_v^{T 1 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} A_1^{2 \times 2} \\
K_1^{T 2 \times 1} &= A_1^{T 2 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} B_v^{2 \times 1} (R + B_v^{T 1 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} B_v^{2 \times 1})^{-1}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Također vrijedi da je matrica zatvorenog regulacijskog kruga bez unaprijednog poznavanja ceste jednaka:

$$\begin{aligned}
A_{cl}^{2 \times 2} &= A_1^{2 \times 2} - B_v^{1 \times 2} K_1^{2 \times 1} \\
A_{cl}^{T 2 \times 2} &= A_1^{T 2 \times 2} - K_1^{T 2 \times 1} B_v^{T 1 \times 2}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Ukoliko jednadžbu za dobivanje P_{12} u (A.5) malo drugačije zapišemo, uzimajući u obzir (A.6) dobivamo:

$$\begin{aligned}
P_{12}^{2 \times N} &= A_1^{T 2 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} A_2^{2 \times N} + A_1^{T 2 \times 2} P_{12}^{2 \times N} A_3^{N \times N} - A_1^{T 2 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} B_v^{2 \times 1} (R + B_v^{T 1 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} B_v^{2 \times 1})^{-1} (B_v^{T 1 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} A_2^{2 \times N} + B_v^{T 1 \times 2} P_{12}^{2 \times N} A_3^{N \times N}) \\
P_{12}^{2 \times N} &= A_1^{T 2 \times 2} (P_{11}^{2 \times 2} A_2^{2 \times N} + P_{12}^{2 \times N} A_3^{N \times N}) - K_1^{T 2 \times 1} B_v^{T 1 \times 2} (P_{11}^{2 \times 2} A_2^{2 \times N} + P_{12}^{2 \times N} A_3^{N \times N}) \\
P_{12}^{2 \times N} &= (A_1^{T 2 \times 2} - K_1^{T 2 \times 1} B_v^{T 1 \times 2}) (P_{11}^{2 \times 2} A_2^{2 \times N} + P_{12}^{2 \times N} A_3^{N \times N})
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Izraz (A.8) uz supstituciju prve zagrade sa (A.7) jednak je:

$$P_{12}^{2 \times N} = \mathbf{A}_{cl}^{T \ 2 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} \mathbf{A}_2^{2 \times N} + \mathbf{A}_{cl}^{T \ 2 \times 2} P_{12}^{2 \times N} \mathbf{A}_3^{N \times N} \quad (\text{A.9})$$

Iz izraza (A.9) slijedi da P_{12} možemo izračunati poznavanjem zatvorenog regulacijskog kruga bez unaprijednog poznavanja ceste i da će P_{12} biti drugačiji ukoliko se promijene karakteristike zatvorenog regulacijskog kruga bez unaprijednog poznavanja ceste.

Ako matricu P_{12} općenito zapišemo kao niz stupčanih vektora dobivamo:

$$P_{12}^{2 \times N} = \begin{bmatrix} P_{12,1}^{2 \times 1} & P_{12,2}^{2 \times 1} & \cdots & P_{12,(N-1)}^{2 \times 1} & P_{12,N}^{2 \times 1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

što je uz (A.9) jednako:

$$\begin{bmatrix} P_{12,1}^{2 \times 1} & P_{12,2}^{2 \times 1} & \cdots & P_{12,(N-1)}^{2 \times 1} & P_{12,N}^{2 \times 1} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{cl}^{T \ 2 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_v^{2 \times 1} & \mathbf{0}^{2 \times N-1} \end{bmatrix} + \mathbf{A}_{cl}^{T \ 2 \times 2} \begin{bmatrix} P_{12,1}^{2 \times 1} & P_{12,2}^{2 \times 1} & \cdots & P_{12,(N-1)}^{2 \times 1} & P_{12,N}^{2 \times 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N-1 \times 1} & \mathbf{I}_{N-1 \times N-1} \\ 0 & \mathbf{0}_{1 \times N-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Izraz (A.11) je nakon množenja jednak:

$$\begin{bmatrix} P_{12,1}^{2 \times 1} & P_{12,2}^{2 \times 1} & \cdots & P_{12,(N-1)}^{2 \times 1} & P_{12,N}^{2 \times 1} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{cl}^{T \ 2 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_v^{2 \times 1} & \mathbf{0}^{2 \times N-1} \end{bmatrix} + \mathbf{A}_{cl}^{T \ 2 \times 2} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & P_{12,1}^{2 \times 1} & \cdots & P_{12,(N-2)}^{2 \times 1} & P_{12,(N-1)}^{2 \times 1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Zapisivanjem (A.12) po komponentama dobivamo konačno rješenje za izračunavanje P_{12} :

$$\begin{aligned} P_{12,1}^{2 \times 1} &= \mathbf{A}_{cl}^{T \ 2 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} \mathbf{G}_v^{2 \times 1} \\ P_{12,2}^{2 \times 1} &= \mathbf{A}_{cl}^{T \ 2 \times 2} P_{12,1}^{2 \times 1} = \left(\mathbf{A}_{cl}^{T \ 2 \times 2} \right)^2 P_{11}^{2 \times 2} \mathbf{G}_v^{2 \times 1} \\ &\vdots \\ P_{12,(N-1)}^{2 \times 1} &= \mathbf{A}_{cl}^{T \ 2 \times 2} P_{12,(N-2)}^{2 \times 1} = \left(\mathbf{A}_{cl}^{T \ 2 \times 2} \right)^{N-1} P_{11}^{2 \times 2} \mathbf{G}_v^{2 \times 1} \\ P_{12,N}^{2 \times 1} &= \left(\mathbf{A}_{cl}^{T \ 2 \times 2} \right)^N P_{11}^{2 \times 2} \mathbf{G}_v^{2 \times 1} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Konačno, uvrštavanjem (A.10) u (A.2) dobivamo:

$$\mathbf{K}_2^{1 \times N} = \left(\mathbf{R} + \mathbf{B}_v^{T \ 1 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} \mathbf{B}_v^{2 \times 1} \right)^{-1} \left(\mathbf{B}_v^{T \ 1 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_v^{2 \times 1} & \mathbf{0}^{2 \times N-1} \end{bmatrix} + \mathbf{B}_v^{T \ 1 \times 2} \begin{bmatrix} P_{12,1}^{2 \times 1} & P_{12,2}^{2 \times 1} & \cdots & P_{12,(N-1)}^{2 \times 1} & P_{12,N}^{2 \times 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N-1 \times 1} & \mathbf{I}_{N-1 \times N-1} \\ 0 & \mathbf{0}_{1 \times N-1} \end{bmatrix} \right) \quad (\text{A.14})$$

što uz (A.13), nakon nekoliko koraka sređivanja izraza postaje konačan izraz za matricu pojačanja \mathbf{K}_2 :

$$\mathbf{K}_2^{1 \times N} = \left(\mathbf{R} + \mathbf{B}_v^{T \ 1 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} \mathbf{B}_v^{2 \times 1} \right)^{-1} \mathbf{B}_v^{T \ 1 \times 2} \begin{bmatrix} P_{11}^{2 \times 2} \mathbf{G}_v^{2 \times 1} & \mathbf{A}_{cl}^{T \ 2 \times 2} P_{11}^{2 \times 2} \mathbf{G}_v^{2 \times 1} & \cdots & \left(\mathbf{A}_{cl}^{T \ 2 \times 2} \right)^{N-2} P_{11}^{2 \times 2} \mathbf{G}_v^{2 \times 1} & \left(\mathbf{A}_{cl}^{T \ 2 \times 2} \right)^{N-1} P_{11}^{2 \times 2} \mathbf{G}_v^{2 \times 1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

PRILOZI

I. CD-R disc